SYARAT DIRICHLET

Misalkan $f(t)$ adalah fungsi yang licin bagian demi bagian, berperioda $2L$, maka deret fourier konvergen

1. Ke nilai $f(t)$ untuk setiap titik di mana fungsi f kontinu.
2. Ke nilai $\frac{1}{2}[f(t_{0^+}) + f(t_{0^-})]$ bagi tiap titik t_0 dimana fungsi f diskontinu.

Catatan: $\frac{1}{2}[f(t_{0^+}) + f(t_{0^-})]$ menyatakan nilai rata-rata dari limit kiri dan limit kanan fungsi f di titik t_0. Jika f kontinu di t. Jelas dipenuhi pula $f(t) = \frac{1}{2}[f(t_+) + f(t_-)]$ (licin).

Contoh:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & ,-1 < t < 0 \\ 0 & ,0 < t < 1 \end{cases}$$

Fungsi tersebut adalah fungsi periodik dengan perioda 2. Tentukan konvergen ke nilai berapa deret Fourier tersebut di titik-titik kekontinuan $x = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{5}{2}$ dan di titik-titik ke tak kontinuan $x = 0,1,3$

Jawab:

Menurut syarat dirichlet maka dititik kekontinuan

$x = \frac{1}{2}$ konvergen ke 0

$x = \frac{3}{2}$ konvergen ke 1

$x = -\frac{5}{2}$ konvergen ke 1

Menurut syarat dirichlet maka dititik ketak kontinuan

$x = 0$ konvergen ke $\frac{1}{2}(0 + 1) = \frac{1}{2}$

$x = 1$konvergen ke $\frac{1}{2}(1 + 0) = \frac{1}{2}$

$x = 3$ konvergen ke $\frac{1}{2}(1 + 0) = \frac{1}{2}$

FUNGSI GENAP DAN GANJIL

Fungsi f dikatakan *fungsi genap* jika $f(-x) = f(x)$ untuk setiap $x \in D_f$, dan katakan *fungsi ganjil* jika $f(-x) = -f(x)$ untuk setiap $x \in D_f$. Berdasarkan pengertian ini, grafik fungsi genap simetri terhadap sumbu y dan grafik fungsi ganjil simetri terhadap titik $(0,0)$.

Contoh:

1. Fungsi $f(x) = \cos x$ adalah fungsi genap karena $f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$ untuk setiap $x \in D_f = \mathbb{R}$

2. Fungsi $f(x) = x^3 + x$ adalah fungsi ganjil karena $f(-x) = (-x)^3 + (-x) = -(x^3 + x) = -f(x)$ untuk setiap $x \in D_f = \mathbb{R}$

Jika $f(x)$ adalah fungsi genap, maka $\int_{-L}^{L} f(x)dx = 2\int_{0}^{L} f(x)dx$. Jika $f(x)$ fungsi ganjil maka $\int_{-L}^{L} f(x)dx = 0$. Maka koefisien-koefisien untuk deret fourier untuk fungsi yang merupakan fungsi genap menjadi:

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

$$b_n = 0$$

Maka deret Fourier untuk fungsi genpa menjadi:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L}$$

Sedangkan untuk fungsi ganjil, koefisen-koefisien deret Fourier:

$$a_0 = 0$$

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

Maka deret fourier untuk fungsi ganjil menjadi:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

Contoh:

Diketahui fungsi:

$$f(x) = x^2 \quad , -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$$

Periodik dengan perioda 1, sehingga $f(x+1) = f(x)$. Nyatakan fungsi tersebut dalam deret Fourier.

Jawab:

Fungsi $f(x) = x^2$ adalah suatu fungsi genap $T = 1$, sehingga $L = \frac{1}{2}T = \frac{1}{2}$, akan teruraikan dalam deret cosinus. $b_n = 0$

$$a_0 = \frac{2}{1/2}\int_0^{1/2} x^2\,dx = 4\left(\frac{1}{3}x^3 \Big|_0^{1/2}\right) = 4\left(\frac{1}{3}.\frac{1}{8} - 0\right) = \frac{1}{6}$$

$$a_n = \frac{2}{1/2}\int_0^{1/2} x^2 \cos\frac{n\pi x}{1/2}\,dx = 4\int_0^{1/2} x^2 \cos 2n\pi x\,dx$$

Untuk menyelesaikan integral di atas harus digunakan integral parsial

Misal $u = x^2 \leftrightarrow du = 2xdx$ dan $dv = \cos 2n\pi x\,dx \leftrightarrow v = \frac{1}{2n\pi}\sin 2n\pi x$

$$= 4\left[\frac{x^2}{2n\pi}\sin 2n\pi x \Big|_0^{1/2} - \int_0^{1/2} \frac{x}{n\pi}\sin 2n\pi x\,dx\right]$$

Untuk $\int_0^{1/2} x \sin 2n\pi x\,dx$

Misal $u = x \leftrightarrow du = dx$ dan $dv = \sin 2n\pi x\,dx \leftrightarrow v = -\frac{1}{2n\pi}\cos 2n\pi x$ Maka

$$= 4\left[\frac{x^2}{2n\pi}\sin 2n\pi x \Big|_0^{1/2} - \frac{1}{n\pi}\left(-\frac{x}{2n\pi}\cos 2n\pi x \Big|_0^{1/2} + \int_0^{1/2} \frac{1}{2n\pi}\cos 2n\pi x\,dx\right)\right]$$

$$= 4\left[\frac{x^2}{2n\pi}\sin 2n\pi x + \frac{x}{2(n\pi)^2}\cos 2n\pi x - \frac{1}{2(n\pi)^2}\left(\frac{1}{2n\pi}\sin 2n\pi x\right)\right]\Big|_0^{1/2}$$

$$= 4\left[\left(\frac{1/4}{2n\pi}\sin n\pi + \frac{1/2}{2(n\pi)^2}\cos n\pi - \frac{1}{4(n\pi)^3}\sin n\pi\right) - (0 + 0 - 0)\right]$$

$$= 4\left[\frac{1}{4(n\pi)^2}\cos n\pi\right] = \frac{1}{(n\pi)^2}(-1)^n$$

Maka deret Fourier dari fungsi $f(x)$:

$$f(x) = \frac{1}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n\pi)^2}\cos 2n\pi x$$

DERET FOURIER SINUS DAN KOSINUS SEPARUH JANGKAUAN

Dalam kehidupan nyata sering kali fungsi $f(x)$ hanya terdefinisi dalam suatu selang positif, $0 < x < L$. Oleh karena itu, seringkali perlu untuk memperluasnya ke seluruh sumbu x, baik arah sumbu x positif maupun ke arah sumbu x negatif. Dalam hal ini ada tiga pilihan yang dapat dilakukan sehingga berikut:

1. Fungsi $f(x)$ diperluas menjadi fungsi periodik tidak ganjil-tidak genap dengan periodik $T = L$; dan selang dasar $0 < x < L$
2. Selang dasar $0 < x < L$ diperluas ke selang negatif secara simetris terhadap sumbu $x = 0$ menjadi $-L < x < L$ dan fungsi $f(x)$ diperluas menjadi fungsi periodik dengan perioda $T = 2L$ dalam hal ini punya dua pilihan diperluas ke fungsi genap atau ganjil.

Contoh:

Diketahui sebuah fungsi yang terdefinisi pada sehingga daerah:

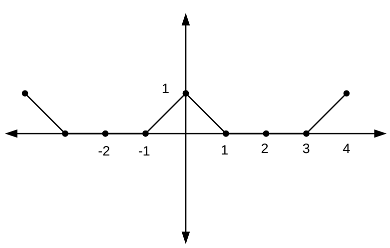
$$f(x) = f(x) = \begin{cases} 1 - x, & 0 < x < 1 \\ x, & 1 < x < 2 \end{cases}$$

Nyatakan dalam fungsi ini dalam:

a. Deret Fourier fungsi cosinus
b. Deret Fourier fungsi sinus
c. Deret Fourier fungsi cosinus-sinus

Jawab:

1. Gambar fungsi $f(x)$ jika diperluas kedalam fungsi cosinus (genap):



Karena fungsi tersebut diperluas dalam bentuk fungsi genap dengan periode $T = 4$ maka diperoleh $L = 2$, koefisien-koefisien untuk deret Fouriernya: $b_n = 0$

$$a_0 = \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 (1-x)dx + \int_1^2 0dx = x - \frac{1}{2}x^2 \Big|_0^1 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) - 0 = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx = \int_0^1 (1-x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx + \int_1^2 0dx = \int_0^1 \cos\frac{n\pi x}{2}dx - \int_0^1 x\cos\frac{n\pi x}{2}dx$$

Untuk $\int_0^1 x\cos\frac{n\pi x}{2}dx$ akan digunakan integral parsial

Misal $u = x \leftrightarrow du = dx$ dan $dv = \cos\frac{n\pi x}{2}dx \leftrightarrow v = \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}$

$$\int_0^1 x\cos\frac{n\pi x}{2}dx = \frac{2x}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}dx = \frac{2x}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2} + \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^1$$

$$= \left(\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{4}{(n\pi)^2}\cos\frac{n\pi}{2}\right) - \left(0 + \frac{4}{(n\pi)^2}\cos 0\right) = \frac{4}{(n\pi)^2}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - 1\right)$$

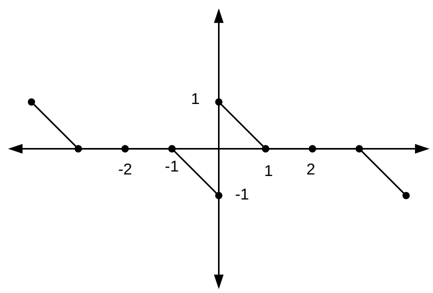
Maka integral diatas menjadi

$$a_n = \int_0^1 \cos\frac{n\pi x}{2}dx - \frac{4}{(n\pi)^2}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - 1\right) = \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^1 - \frac{4}{(n\pi)^2}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - 1\right) = -\frac{4}{(n\pi)^2}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - 1\right)$$

Maka deret fourier fungsi di atas adalah

$$f(x) = \frac{1}{4} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(n\pi)^2}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - 1\right)\cos\frac{n\pi x}{2}$$

2. Gambar fungsi $f(x)$ jika diperluas kedalam fungsi sinus (ganjil):



Karena fungsi tersebut diperluas dalam bentuk fungsi ganjil dengan periode $T = 4$ maka diperoleh $L = 2$, koefisien-koefisien untuk deret Fouriernya: $a_0 = 0$ dan $a_n = 0$

$$b_n = \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx = \int_0^1 (1-x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx + \int_1^2 0dx = \int_0^1 \sin\frac{n\pi x}{2}dx - \int_0^1 x\sin\frac{n\pi x}{2}dx$$

Untuk $\int_0^1 x\sin\frac{n\pi x}{2}dx$ akan digunakan integral parsial

Misal $u = x \leftrightarrow du = dx$ dan $dv = \sin\frac{n\pi x}{2}dx \leftrightarrow v = -\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}$

$$\int_0^1 x\sin\frac{n\pi x}{2}dx = -\frac{2x}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{2}{\text{n}\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}dx = -\frac{2x}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2} + \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^1$$

$$= \left(-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{4}{(n\pi)^2}\sin\frac{n\pi}{2}\right) - \left(0 + \frac{4}{(n\pi)^2}\sin 0\right) = -\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{4}{(n\pi)^2}\sin\frac{n\pi}{2}$$

Maka integral diatas menjadi

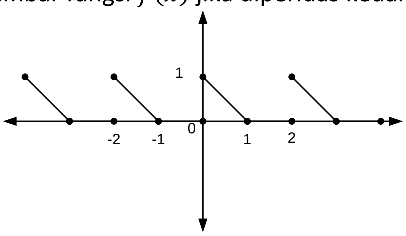
$$a_n = \int_0^1 \sin\frac{n\pi x}{2}dx + \frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{4}{(n\pi)^2}\sin\frac{n\pi}{2} = -\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^1 + \frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{4}{(n\pi)^2}\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{2}{n\pi} + \frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{4}{(n\pi)^2}\sin\frac{n\pi}{2} = \frac{2}{n\pi} - \frac{4}{(n\pi)^2}\sin\frac{n\pi}{2}$$

Maka deret fourier fungsi di atas adalah

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n\pi} - \frac{4}{(n\pi)^2} \sin\frac{n\pi}{2}\right) \sin\frac{n\pi x}{2}$$

3. Gambar fungsi $f(x)$ jika diperluas kedalam fungsi cosinus-sinus (bukan ganjil-genap):



Karena fungsi tersebut diperluas dalam bentuk fungsi bukan ganjil-genap dengan periode $T = 2$ maka diperoleh $L = 1$, koefisien-koefisien untuk deret Fouriernya:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^2 f(x)dx = \frac{1}{1}\left[\int_0^1 (1-x)dx + \int_1^2 0dx\right] = x - \frac{1}{2}x^2 \Big|_0^1 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) - 0 = \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{1}\int_0^2 f(x)\cos\frac{n\pi x}{1}dx = \int_0^1 (1-x)\cos n\pi x\, dx + \int_1^2 0dx = \int_0^1 \cos n\pi x\, dx - \int_0^1 x\cos n\pi x\, dx$$

Dengan melihat jawaban nomor 1 kita peroleh

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n\pi}\sin n\pi x - \left(\frac{x}{n\pi}\sin n\pi x + \left(\frac{1}{n\pi}\right)^2 \cos n\pi x\right)\Big|_0^1 \\ &= \left[\frac{1}{n\pi}\sin n\pi - \frac{1}{n\pi}\sin n\pi - \left(\frac{1}{n\pi}\right)^2 \cos n\pi\right] - \left[0 - 0 - \left(\frac{1}{n\pi}\right)^2\right] = \left(\frac{1}{n\pi}\right)^2 (1 - \cos n\pi) \\ &= \left(\frac{1}{n\pi}\right)^2 (1 - (-1)^n) = \begin{cases} 0 & , jika\ n\ genap \\ \dfrac{2}{n^2\pi^2} & , jika\ n\ ganjil \end{cases} \end{aligned}$$

$$b_n = \frac{1}{1}\int_0^2 f(x)\sin\frac{n\pi x}{1}dx = \int_0^1 (1-x)\sin n\pi x\, dx + \int_1^2 0dx = \int_0^1 \sin n\pi x\, dx - \int_0^1 x\sin n\pi x\, dx$$

Dengan melihat nomor 2 kita peroleh

$$\begin{aligned} b_n &= -\frac{1}{n\pi}\cos n\pi x - \left(-\frac{x}{n\pi}\cos n\pi x + \left(\frac{1}{n\pi}\right)^2 \sin n\pi x\right)\Big|_0^1 \\ &= \left[-\frac{1}{n\pi}\cos n\pi + \frac{1}{n\pi}\cos n\pi - \left(\frac{1}{n\pi}\right)^2 \sin n\pi\right] - \left[-\frac{1}{n\pi} + 0 - 0\right] = \frac{1}{n\pi} \end{aligned}$$

Maka deret fourier fungsi di atas adalah

$$f(x) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{(2n-1)^2\pi^2}\right)\cos n\pi x + \frac{1}{n\pi}\sin n\pi x$$