

Penyederhanaan Fungsi Boolean

Contoh. $f(x, y) = x'y + xy' + y'$

disederhanakan menjadi

$$f(x, y) = x' + y'$$

Penyederhanaan fungsi Boolean dapat dilakukan dengan **3 cara**:

1. Secara aljabar
2. Menggunakan Peta Karnaugh
3. Menggunakan metode Quine Mc Cluskey (metode Tabulasi)

1. Penyederhanaan Secara Aljabar

Contoh:

$$\begin{aligned} 1. f(x, y) &= x + x'y \\ &= (x + x')(x + y) \\ &= 1 \cdot (x + y) \\ &= x + y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. f(x, y, z) &= x'y'z + x'yz + xy' \\ &= x'z(y' + y) + xy' \\ &= x'z + xz' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. f(x, y, z) &= xy + x'z + yz = xy + x'z + yz(x + x') \\ &= xy + x'z + xyz + x'yz \\ &= xy(1 + z) + x'z(1 + y) = xy + x'z \end{aligned}$$

2. PETA KARNAUGH

a. Peta Karnaugh dengan dua peubah

		y	
		0	1
x	0	$x'y'$	$x'y$
	1	xy'	xy

b. Peta dengan tiga peubah

				yz				
				x	00	01	11	10
m_0	m_1	m_3	m_2	0	$x'y'z'$	$x'y'z$	$x'yz$	$x'yz'$
m_4	m_5	m_7	m_6	1	$xy'z'$	$xy'z$	xyz	xyz'

Contoh. Diberikan tabel kebenaran, gambarkan Peta Karnaugh.

x	y	z	$f(x, y, z)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

		yz	00	01	11	10
x	0	0	0	0	0	1
	1	0	0	0	1	1

b. Peta dengan empat peubah

				yz				
				wx	00	01	11	10
m_0	m_1	m_3	m_2	00	$w'x'y'z'$	$w'x'y'z$	$w'x'yz$	$w'x'yz'$
m_4	m_5	m_7	m_6	01	$w'xy'z'$	$w'xy'z$	$w'xyz$	$w'xyz'$
m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}	11	$wxy'z'$	$wxy'z$	$wxyz$	$wxyz'$
m_8	m_9	m_{11}	m_{10}	10	$wx'y'z'$	$wx'y'z$	$wx'yz$	$wx'yz'$

Contoh. Diberikan tabel kebenaran, gambarkan Peta Karnaugh.

w	x	y	z	$f(w, x, y, z)$
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	0

		yz			
		00	01	11	10
wx	00	0	1	0	1
	01	0	0	1	1
	11	0	0	0	1
	10	0	0	0	0

Teknik Minimisasi Fungsi Boolean dengan Peta Karnaugh

1. Pasangan: dua buah 1 yang bertetangga

		yz			
		00	01	11	10
wx	00	0	0	0	0
	01	0	0	0	0
	11	0	0	1	1
	10	0	0	0	0

Sebelum disederhanakan: $f(w, x, y, z) = wxyz + wxyz'$

Hasil Penyederhanaan: $f(w, x, y, z) = wxy$

Bukti secara aljabar:

$$\begin{aligned}
 f(w, x, y, z) &= wxyz + wxyz' \\
 &= wxy(z + z') \\
 &= wxy(1) \\
 &= wxy
 \end{aligned}$$

2. Kuad: empat buah 1 yang bertetangga

		yz			
		00	01	11	10
wx	00	0	0	0	0
	01	0	0	0	0
	11	1	1	1	1
	10	0	0	0	0

Sebelum disederhanakan: $f(w, x, y, z) = wxy'z' + wxy'z + wxyz + wxyz'$

Hasil penyederhanaan: $f(w, x, y, z) = wx$

Bukti secara aljabar:

$$\begin{aligned}
 f(w, x, y, z) &= wxy' + wxy \\
 &= wx(z' + z) \\
 &= wx(1) \\
 &= wx
 \end{aligned}$$

		yz			
		00	01	11	10
wx	00	0	0	0	0
	01	0	0	0	0
	11	1	1	1	1
	10	0	0	0	0

Contoh lain:

		yz			
		00	01	11	10
wx	00	0	0	0	0
	01	0	0	0	0
	11	1	1	0	0
	10	1	1	0	0

Sebelum disederhanakan: $f(w, x, y, z) = wxy'z' + wxy'z + wx'y'z' + wx'y'z$

Hasil penyederhanaan: $f(w, x, y, z) = wy'$

3. *Oktet*: delapan buah 1 yang bertetangga

		yz			
		00	01	11	10
wx	00	0	0	0	0
	01	0	0	0	0
	11	1	1	1	1
	10	1	1	1	1

Sebelum disederhanakan: $f(a, b, c, d) = wxy'z' + wxy'z + wxyz + wxyz' + wx'y'z' + wx'y'z + wx'yz + wx'yz'$

Hasil penyederhanaan: $f(w, x, y, z) = w$

Bukti secara aljabar:

$$\begin{aligned}
 f(w, x, y, z) &= wy' + wy \\
 &= w(y' + y) \\
 &= w
 \end{aligned}$$

		yz			
		00	01	11	10
wx	00	0	0	0	0
	01	0	0	0	0
	11	1	1	1	1
	10	1	1	1	1

Contoh 5.11. Sederhanakan fungsi Boolean $f(x, y, z) = x'yz + xy'z' + xyz + xyz'$.

Jawab:

Peta Karnaugh untuk fungsi tersebut adalah:

	yz 00	01	11	10
x 0			1	
1	1		1	1

Hasil penyederhanaan: $f(x, y, z) = yz + xz'$

Contoh 5.12. Andaikan suatu tabel kebenaran telah diterjemahkan ke dalam Peta Karnaugh. Sederhanakan fungsi Boolean yang bersesuaian sesederhana mungkin.

	yz 00	01	11	10
wx 00	0	1	1	1
01	0	0	0	1
11	1	1	0	1
10	1	1	0	1

Jawab: (lihat Peta Karnaugh) $f(w, x, y, z) = wy' + yz' + w'x'z$

Contoh 5.13. Minimisasi fungsi Boolean yang bersesuaian dengan Peta Karnaugh di bawah ini.

		yz			
		00	01	11	10
wx	00	0	0	0	0
	01	0	1	0	0
	11	1	1	1	1
	10	1	1	1	1

Jawab: (lihat Peta Karnaugh) $f(w, x, y, z) = w + xy'z$

Jika penyelesaian Contoh 5.13 adalah seperti di bawah ini:

		yz			
		00	01	11	10
wx	00	0	0	0	0
	01	0	1	0	0
	11	1	1	1	1
	10	1	1	1	1

maka fungsi Boolean hasil penyederhanaan adalah

$$f(w, x, y, z) = w + w'xy'z \quad (\text{jumlah literal} = 5)$$

yang ternyata masih belum sederhana dibandingkan $f(w, x, y, z) = w + xy'z$ (jumlah literal = 4).

Contoh 5.14. (Penggulungan/*rolling*) Sederhanakan fungsi Boolean yang bersesuaian dengan Peta Karnaugh di bawah ini.

		yz			
		00	01	11	10
wx	00	0	0	0	0
	01	1	0	0	1
	11	1	0	0	1
	10	0	0	0	0

Jawab: $f(w, x, y, z) = xy'z' + xyz' \implies$ belum sederhana

Penyelesaian yang lebih minimal:

		yz			
		00	01	11	10
wx	00	0	0	0	0
	01	1	0	0	1
	11	1	0	0	1
	10	0	0	0	0

$f(w, x, y, z) = xz' \implies$ lebih sederhana

Contoh 5.15: (Kelompok berlebihan) Sederhanakan fungsi Boolean yang bersesuaian dengan Peta Karnaugh di bawah ini.

		yz			
		00	01	11	10
wx	00	0	0	0	0
	01	0	1	0	0
	11	0	1	1	0
	10	0	0	1	0

Jawab: $f(w, x, y, z) = xy'z + wxz + wyz \rightarrow$ masih belum sederhana.

Penyelesaian yang lebih minimal:

		yz			
		00	01	11	10
wx	00	0	0	0	0
	01	0	1	0	0
	11	0	1	1	0
	10	0	0	1	0

$f(w, x, y, z) = xy'z + wyz \implies$ lebih sederhana

Contoh 5.16. Sederhanakan fungsi Boolean yang bersesuaian dengan Peta Karnaugh di bawah ini.

		<i>cd</i>			
		00	01	11	10
<i>ab</i>	00	0	0	0	0
	01	0	0	1	0
	11	1	1	1	1
	10	0	1	1	1

Jawab: (lihat Peta Karnaugh di atas) $f(a, b, c, d) = ab + ad + ac + bcd$

Contoh 5.17. Minimisasi fungsi Boolean $f(x, y, z) = x'z + x'y + xy'z + yz$

Jawab:

$$x'z = x'z(y + y') = x'yz + x'y'z$$

$$x'y = x'y(z + z') = x'yz + x'yz'$$

$$yz = yz(x + x') = xyz + x'yz$$

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= x'z + x'y + xy'z + yz \\ &= x'yz + x'y'z + x'yz + x'yz' + xy'z + xyz + x'yz \\ &= x'yz + x'y'z + x'yz' + xyz + xy'z \end{aligned}$$

Peta Karnaugh untuk fungsi tersebut adalah:

		<i>yz</i>			
		00	01	11	10
<i>x</i>	0		1	1	1
	1		1	1	

Hasil penyederhanaan: $f(x, y, z) = z + x'yz'$

Peta Karnaugh untuk lima peubah

	000	001	011	010	110	111	101	100
00	m_0	m_1	m_3	m_2	m_6	m_7	m_5	m_4
01	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}	m_{14}	m_{15}	m_{13}	m_{12}
11	m_{24}	m_{25}	m_{27}	m_{26}	m_{30}	m_{31}	m_{29}	m_{28}
10	m_{16}	m_{17}	m_{19}	m_{18}	m_{22}	m_{23}	m_{21}	m_{20}

↑
Garis pencerminan

Contoh 5.21. (Contoh penggunaan Peta 5 peubah) Carilah fungsi sederhana dari $f(v, w, x, y, z) = \Sigma (0, 2, 4, 6, 9, 11, 13, 15, 17, 21, 25, 27, 29, 31)$

Jawab:

Peta Karnaugh dari fungsi tersebut adalah:

	xyz							
	00	00	01	01	11	11	10	10
	0	1	1	0	0	1	1	0
vw								
00	1			1	1			1
01		1	1			1	1	
11		1	1			1	1	
10		1					1	

Jadi $f(v, w, x, y, z) = wz + v'w'z' + vy'z$