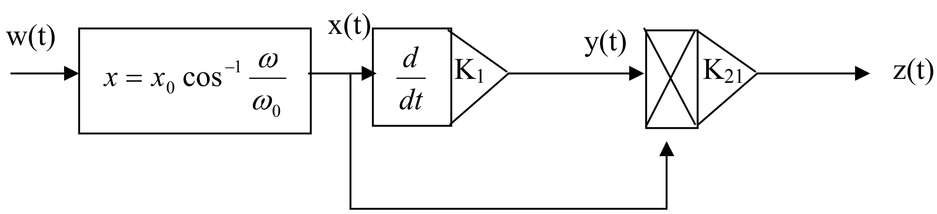
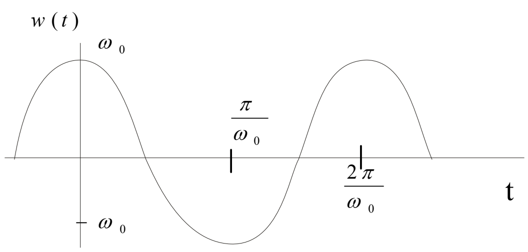
Bab V
Fourier

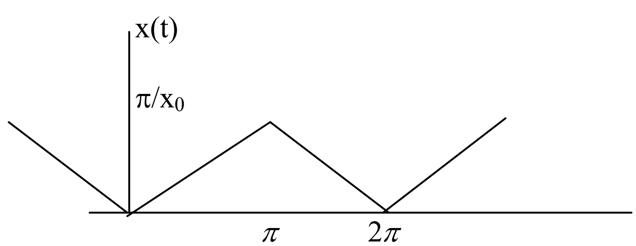
Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 – 1830) adalah ahli Fisika dan Matematika Perancis yang menggunakan deret harmonik untuk mempelajari konduksi panas dalam benda padat

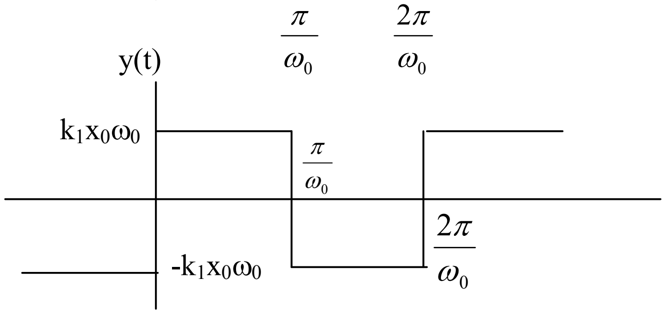
5.1. Deret Fourier

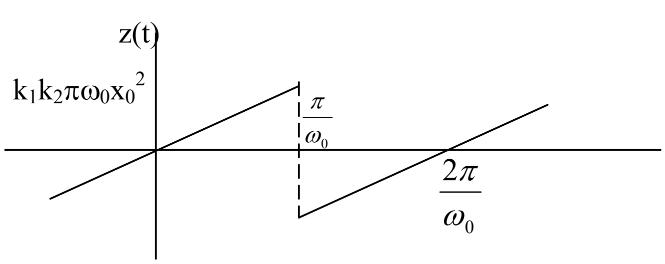
Setiap bentuk gelombang riil dapat dihasilkan (secara matematik) dengan mendistorsikan sebuah gelombang berbentuk sinus. Sebagai contoh di bawah ini adalah sistem yang menghasilkan gelombang segitiga, gelombang kotak dan gelombang gigi gergaji (sawtooth) sebagai respon dari input sinus $w(t) = w_0 \cos \omega_0 t$











Hal ini menyatakan bahwa setiap sinyal periodik dapat dinyatakan oleh deret harmonik (karena output dari sebuah eksitasi sinus pada sistem statik dapat dinyatakan sebagai deret harmonik). Sebagai contoh gelombang segitiga yang dihasilkan dari rangkaian di atas dapat dinyatakan dengan sebuah deret harmonik :

$$x(t) = A_0 \cos\theta_0 + A_1 \cos\left(\omega_0 t + \theta_1\right) + A_2 \cos\left(2\omega_0 t + \theta_2\right) + ...$$

Dengan A_n adalah amplituda puncak dan θ_n adalah fasa awal (n = 0, 1, 2, ..)

5.1.A. Koefisien Fourier

Diasumsikan bahwa sinyal periodik x(t) dapat dinyatakan dengan deret harmonik sebagai berikut :

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\left(n\omega_0 t + \theta_n\right)$$

Dengan $A_n = \begin{cases} |X_0| & n = 0 \\ 2|X_0| & n \neq 0 \end{cases} \qquad \theta_n = \angle X_n$

Atau dalam bentuk eksponensial :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n \exp\left(jn\omega_0 t\right)$$

Karena perioda dari deret harus sama dengan perioda sinyal yang direpresentasikannya maka frekuensi dasar dapat dinyatakan dengan

$f_0 = \dfrac{1}{T}$; T = perioda sinyal

Jika sinyal x(t) dikalikan dengan $e^{-jk\omega_0 t}$ dan diintegrasikan untuk satu perioda t = t_0 sampai t = t_0 + T. Memberikan transformasi Fourier kontinu:

$$\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)e^{-jk\omega_0 t} dt = \int_{t_0}^{t_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_n e^{j(n-k)\omega_0 t} dt$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T} e^{j(n-k)} dt = \begin{cases} \mathrm{T} & n = k \\ 0 & n \neq k \end{cases}$$

Sehingga nilai yang tidak nol pada sumasi di atas hanya untuk n = k maka

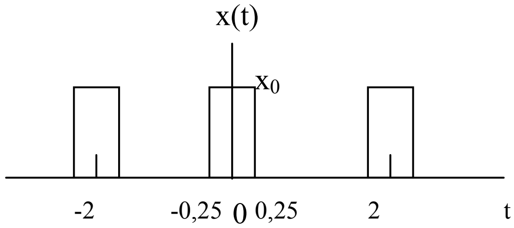
$$\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)e^{-jk\omega_0 t} = X_k T \quad \text{atau}$$

$$X_k = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)e^{-jk\omega_0 t} dt; \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

x_k ini disebut koefisien Fourier untuk sinyal x(t) sedangkan deret harmonik yang dibentuknya disebut deret Fourier.

Contoh 5.1.

Carilah deret Fourier dari deret pulsa kotak berikut :



Jawab :
Perioda dari sinyal x(t) adalah T = 2 ms, maka frekuensi dasar deret Fourier untuk x(t) adalah :

$$f_0 = \frac{1}{0{,}002} = 500\ Hz$$

$$\omega_0 = 2\pi f = \frac{2\pi}{0{,}002} = \pi\ krad/s$$

Misal dipilih $t_0 = \frac{-T}{2} = -1$ ms sehingga $t_0 + T = \frac{T}{2} = 1$ ms maka

$$X_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t}\,dt \quad \text{dengan}$$

$$x(t) = \begin{cases} 0 & ; \quad -T/2 < t \le -\tau/2 \\ x_0 & ; \quad -\tau/2 < t \le \tau/2 \\ 0 & ; \quad \tau/2 < t \le \tau/2 \end{cases}$$

Koefisien Fouriernya adalah :

$$X_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x_0\,dt = \frac{x_0}{T}T = x_0$$

dan sinyal ini sekarang dapat dinyatakan dengan

$$x(t) = x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k \cos(k\omega t)$$