Bab III
Respon Sinusoidal

Sinyal sinusiodal digunakan sebagai input uji terhadap kinerja sistem, misal untuk mengetahui respon frekuensi, distorsi harmonik dan distorsi intermodulasi.

3.1. Bentuk Amplituda-fasa untuk Sinyal Sinusoidal

Sinyal sinusoidal x(t) dapat dinyatakan dalam bentuk amplituda-fasa :

$$x(t) = A \cos(\omega t + \theta)$$

A = Amplituda puncak
ω = frekuensi sudut
θ = fasa awal

3.2. Bentuk Eksponensial

Sinyal sinusoidal dapat dinyatakan dalam bentuk eksponensial

$$x(t) = Xe^{j\omega t} + X^*e^{-j\omega t}$$

dengan
X = amplituda kompleks
X* = Konjugat dari X

Menggunakan identitas Euler : $\cos \alpha = \frac{1}{2} e^{j\alpha} + \frac{1}{2} e^{-j\alpha}$ diperoleh

$$X = \tfrac{1}{2} Ae^{j\theta}$$

dengan

$A = 2|X|$

$\theta = \angle X$

Contoh :

Sinyal sinusoidal :

$x(t) = 10 \cos(\omega t - \pi/4)$ V

Nyatakanlah dalam bentuk eksponensial

Jawab :

$x(t) = 5e^{-j\pi/4}e^{j\omega t} + 5e^{j\pi/4}e^{-j\omega t}$ V

Contoh :

Sinyal sinusoidal x(t) dinyatakan dalam bentuk eksponensial

$x(t) = Xe^{j\omega t} + X^*e^{-j\omega t}$

dengan

$X = 4e^{j3\pi/4}$ mA. Nyatakan dalam bentuk Amplituda fasa

Jawab :

$x(t) = 8 \cos(\omega t+3\pi/4)$ mA

Complex number arithmetic: A review

A complex number may be represented in rectangular form as follows:

$$c = a + jb \qquad \text{Rectangular format of complex number} \tag{1.12}$$

The number $j = \sqrt{-1}$. a is the real part of the complex number and b is the imaginary part of the complex number.

The complex conjugate of a complex number is obtained by replacing j with $-j$. For the number given by Eq. (1.12) is $c^* = a - jb$

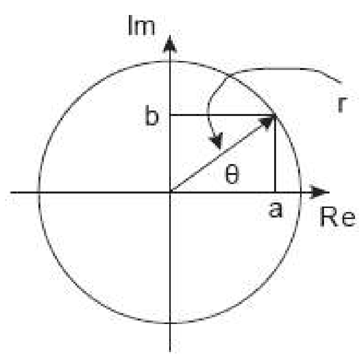
The magnitude of the complex number is

$$\text{magnitude} = cc^* = (a + jb)(a - jb) = r = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{1.13}$$

And the phase is

$$\text{phase} = \theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) \tag{1.14}$$

The graphical representation of the complex number in the complex plane is:



Euler's identity is an important relationship in the theory of complex numbers. It states:

$$e^{j\phi} = \cos\phi + j\sin\phi \tag{1.15}$$

From the graphical representation of a complex number and Euler's identity we may represent the complex number in polar form as

$$c = r(\cos\theta + j\sin\theta) = re^{j\theta} \qquad \text{Polar format of complex number} \tag{1.16}$$

Latihan :

1. Nyatakan sinyal-sinyal berikut dalam bentuk amplituda fasa
   (a) $x(t) = 10 - 5\cos(\omega t - \pi/2)$ mA
   (b) $x(t) = -20 + 10\sin\omega t$ V

(c) $x(t) = 3\cos\omega t + 4 \sin\omega t$ mV
(d) $x(t) = 5e^{-j\omega t} + 5e^{j\omega t}$ V
(e) $x(t) = 2 + (1+j)e^{-j\omega t} + (1-j)e^{j\omega t}$ mA
(f) $x(t) = je^{j(\omega t - \pi/3)} - je^{-j(\omega t - \pi/3)}$ mV

$$(g)\ x(t) = \frac{10e^{j\omega t}}{1-j} + \frac{10e^{-j\omega t}}{1+j} - 5 \quad \text{mA}$$

2. Nyatakan sinyal-sinyal berikut dalam bentuk eksponensial

(a) $x(t) = 10 + 5 \cos(\omega t - \pi/4)$ V
(b) $x(t) = 20 + 10 \cos\omega_1 t + 5 \cos(\omega_2 t - \pi/2)$ V
(c) $x(t) = -20 + 10 \sin\omega t$ mA
(d) $x(t) = 10 - 3\cos\omega t + 3\sin\omega t$ V
(e) $x(t) = 5 + 10\cos\omega_1 t + 10\cos(\omega_1 t - \pi/4) - 10\sin(\omega_2 t + \pi/4)$ V

3.3. Fungsi Transfer untuk Sistem Linier

Output untuk sistem linier :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\eta)x(t-\eta)d\eta$$

Untuk input $x(t) = Xe^{j\omega t}$ maka outputnya :

$$\begin{aligned} y(t) &= X\int_{-\infty}^{\infty} h(\eta)e^{j\omega(t-\eta)}d\eta \\ &= Xe^{j\omega t}\int_{-\infty}^{\infty} h(\eta)e^{-j\omega\eta}d\eta \\ &= Xe^{j\omega t}H(j\omega) \end{aligned}$$

dengan

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\eta)e^{-j\omega\eta}d\eta = \text{Fungsi Transfer}$$

Fungsi Transfer nilainya berubah sesuai dengan frekuensi dari sinyal input

Output dapat juga dituliskan :
$y(t) = Ye^{j\omega t}$ dengan $Y = H(j\omega)X$ = Amplituda kompleks output

Contoh :
Respon impulse suatu sistem linier :

$$h(t) = \frac{k}{\tau}e^{-t/\tau}u(t)$$

dengan $\tau = 1$ ms dan $k = 10^3$ V/A. Carilah output y(t) untuk input
$x(t) = 10\cos(\omega_0 t + \pi/4)$ mA dengan $\omega_0 = 2$ krad/s
Jawab :
Amplituda puncak : A = 10 mA
Fasa awal : $\theta = \pi/4$ rad

Amplituda kompleks input :
$X = \frac{1}{2} Ae^{j\theta} = 5e^{j\pi/4}$ mA $= 0{,}005e^{j\pi/4}$ A

Fungsi Transfer sistem :

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\eta)e^{-j\omega\eta}d\eta = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k}{\tau}e^{-\pi/\tau}u(\eta)e^{-j\omega\eta}d\eta$$

$$= \int_{0}^{\infty} \frac{k}{\tau}e^{-(1+j\omega t)\eta/\tau}d\eta = \frac{k}{\tau}\left[-\frac{e^{-(1+j\omega\tau)\eta/\tau}}{(1+j\omega\tau)/\tau}\right]_{\eta=0}^{\eta=\infty}$$

$$= \frac{k}{1+j\omega\tau}$$

Amplituda Kompleks Output :

$$Y = H(j\omega_0)X = \frac{10^3}{1+j\omega_0\tau}\left(0{,}005e^{j\pi/4}\right)$$

$$= \frac{10^3}{1+j\left(2x10^3\right)\left(10^{-3}\right)}\left(0{,}005e^{j\pi/4}\right)$$

$$= \frac{5e^{j\pi/4}}{\sqrt{5}e^{j1{,}11}} = \sqrt{5}e^{-j0{,}32} \quad \text{V}$$

Amplituda puncak output :

$$B = 2|Y| = 2\sqrt{5} \quad \text{V}$$

Fasa awal :

$\varphi = \angle Y = -0{,}32$ rad

Output dinyatakan dalam bentuk Amplituda-fasa :

$$y(t) = 2\sqrt{5}\cos\left(\omega_0 t - 0{,}32\right)$$

dengan

$\omega_0 = 2$krad/s

Latihan

Carilah fungsi transfer untuk sistem yang memiliki respon impuls berikut :

(a) $h(t) = \delta(t) - \frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}u(t)$

(b) $h(t) = \frac{t}{\tau^2}e^{-t/\tau}u(t)$

(c) $h(t) = \frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}(\sin\omega t)u(t)$

(d) $h(t) = \left(\frac{1}{\tau_1}e^{-t/\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}e^{-t/\tau_2}\right)u(t)$

(e) $h(t) = \frac{1}{\tau}r\left(\frac{t}{\tau}\right)$

(f) $h(t) = \omega_0 r\left(\frac{t}{\tau}\right)\cos\omega_0 t$

(g) $h(t) = \omega_0 r\left(\frac{t}{\tau}\right)\sin\omega_0 t$

(h) $h(t) = 4\delta(t) + 3\delta(t - t_0) + 2\delta(t - 2t_0)$

3.4. Gain dan Phase Shift (pergeseran fasa)

Telah diperlihatkan bahwa output sistem linier stasioner stabil untuk input $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta)$ adalah

$y(t) = |H(j\omega_0)|A\cos[\omega_0 t + \theta + \angle H(j\omega_0)]$

dengan $H(j\omega)$ = fungsi transfer sistem

Kita nyatakan gain dengan $\Gamma(\omega)$ dan pergeseran fasa dengan $\phi(\omega)$

$\Gamma(\omega) = |H(j\omega)|$
$\phi(\omega) = \angle H(j\omega)$

sehingga
$y(t) = \Gamma(\omega_0)A\cos[\omega_0 + \theta + \phi(\omega_0)]$

Contoh :
Fungsi Transfer untuk suatu sistem linier stasioner adalah

$$H(j\omega) = \frac{K(1 + j\omega/\omega_2)}{(1 + j\omega/\omega_1)(1 + j\omega/\omega_3)}$$

dengan K = 100 V/V, ω_1 = 1 krad/s, ω_2 = 2 krad/s dan ω_3 = 3 krad/s
Carilah output y(t) untuk input

$x(t) = 5\cos(\omega_0 t - \pi/3)$ dengan ω_0 = 1 krad/s

Jawab :
Gain : $\Gamma(\omega) = |H(j\omega)|$

$$= \left|\frac{K(1 + j\omega/\omega_2)}{(1 + j\omega/\omega_1)(1 + j\omega/\omega_3}\right|$$

$$= \frac{|K||1 + j\omega/\omega_2|}{|1 + j\omega/\omega_1||1 + j\omega/\omega_3|}$$

$$= \frac{|K|\sqrt{1 + (\omega/\omega_2)^2}}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_1)^2}\sqrt{1 + (\omega/\omega_3)^2}}$$

Untuk $\omega = \omega_0$ = 1 krad/s

$$\Gamma(\omega_0) = \frac{100\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}}{\sqrt{1 + 1^2}\sqrt{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2}} = 75 \text{ V/V}$$

Pergeseran fasa :

$$\phi(\omega) = \angle H(j\omega) = \angle K + \angle\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_2}\right) - \angle\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_1}\right) - \angle\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_3}\right)$$

$$= 0 + \tan^{-1}\left(\frac{\omega/\omega_2}{1}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\omega/\omega_1}{1}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\omega/\omega_3}{1}\right)$$

Untuk $\omega = \omega_0$

$$\phi(\omega_0) = \tan^{-1}\left(\frac{0{,}5}{1}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{0{,}3}{1}\right)$$

$$= 0{,}46 - 0{,}79 - 0{,}32 = -0{,}65 \text{ rad}$$

Jadi outputnya :
$y(t) = \Gamma(\omega_0)A\cos[\omega_0 t + \theta + \phi(\omega)]$
$= (75)(5)\cos[\omega_0 t + (-\pi/3) - 0{,}65$
$= 375 \cos(\omega_0 t - 1{,}7)$ V

3.5. Sinyal Konstan (DC = Direct Current)

Sinyal konstan (DC) dinyatakan dalam bentuk $x(t) = x_0$. Sinyal konstan ini dapat dianggap sebagai sinyal sinuisoida yang memiliki frekuensi $\omega = 0$.

Bentuk Amplituda-fasa untuk sinyal DC:

$$x_0 = A\cos\theta$$

$$A = |x_0|$$

$$\theta = \angle x_0 = \begin{cases} 0 & x_0 \geq 0 \\ \pi & x_0 < 0 \end{cases}$$

Bentuk eksponensial untuk sinyal DC:

$X = Ae^{j\theta}$ dengan

$A = |X|$

$\theta = \angle X$

Outputnya : $y(t) = H(0)\, x_0$

$H(0)$ = DC gain

Contoh :

Tentukan output dari contoh sebelumnya untuk input $x(t) = x_0 = -5$ mV

Jawab :

$$H(0) = \frac{K(1 + j0)}{(1 + j0)(1 + j0)} = K = 100 \ \ \text{V/V}$$

$$y(t) = H(0)\, x_0$$
$$= 100(-0{,}005) = -500 \text{ mV}$$

3.6. Sistem Dinyatakan sebagai Persamaan Differensial

Fungsi Transfer sistem linier stasioner yang stabil, output dan inputnya dihubungkan dengan persamaan differensial :

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}} + \ldots. + b_0 x$$

Karena output untuk input $x(t) = Xe^{j\omega t}$ adalah $y(t) = H(j\omega)Xe^{j\omega t}$ maka dengan mensubstitusikan ke persamaan di atas diperoleh :

$$\left[(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \ldots. + a_0\right]H(j\omega)Xe^{j\omega t} = \left[b_m(j\omega)^m + \ldots + b_0\right]Xe^{j\omega t}$$

atau

$$H(j\omega) = \frac{b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \ldots + b_0}{(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \ldots. + a_0}$$

Contoh :

Input $x(t)$ dan output $y(t)$ dari suatu sistem dihubungkan dengan persamaan differensial sebagai berikut :

$$\frac{d^3y}{dt^3} + a_2\frac{d^2y}{dt^2} + a_1\frac{dy}{dt} + a_0 y = b_1\frac{dx}{dt} + b_0 x$$

dengan
$a_0 = b_0 = 24 \times 10^9$
$a_1 = 26 \times 10^6$
$a_2 = 9 \times 10^3$
$b_1 = 24 \times 10^6$

Carilah output untuk input

$$x(t) = 20\cos\left(\omega_o t - \frac{\pi}{2}\right)$$

dengan $\omega_0 = 5$ krad/s

Jawab :

Fungsi transfer sistem :

$$H(j\omega) = \frac{b_1(j\omega) + b_0}{(j\omega)^3 + a_2(j\omega)^2 + a_1(j\omega) + a_0}$$

$$= \frac{j\omega b_1 + b_0}{j\left(a_1\omega - \omega^3\right) + a_0 - a_2\omega^2}$$

Untuk $\omega = \omega_0 = 5$ krad/s

$$H(j\omega_0) = \frac{j(5000)\left(24x10^6\right) + 24x10^9}{j\left[\left(26x10^6\right)(5000) - (5000)^3\right] + 24x10^9 - \left(9x10^3\right)(5000)^2}$$

$$= \frac{24 + j120}{-201 + j5} = 0{,}61e^{-j1,75} \quad \text{A/A}$$

Dari bentuk polar $H(j\omega_0)$ ini diketahui

$\Gamma(\omega_0) = 0{,}61$
$\phi(\omega_0) = -1{,}75$

$$y(t) = 0{,}61(0{,}02)\cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2} - 1{,}75\right)$$

$$= 12{,}2\cos(\omega_0 t - 3{,}31)$$

Latihan :

Tentukan output dari sistem yang dinyatakan dengan persamaan differensial di bawah ini untuk input
:

$x(t) = 5 + 5\cos\omega_0 t$ V

dengan $\omega_0 = 1$ rad/s

(a) $\dfrac{dy}{dt} + 5\omega_0 y = \dfrac{dx}{dt}$

(b) $\dfrac{dy}{dt} + 5\omega_0 y = 10\dfrac{dx}{dt} + 2\omega_0 x$

(c) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 3\omega_0\dfrac{dy}{dt} + 2\omega_0{}^2 y = 5\dfrac{d^2x}{dt^2} + 20\omega_0\dfrac{dx}{dt} + 15\omega_0{}^2 x$

(d) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 3\omega_0\dfrac{dy}{dt} + 2\omega_0{}^2 y = \omega_0\dfrac{dx}{dt}$

$$(e)\ \frac{d^3y}{dt^3} + 3\omega_0\frac{d^2y}{dt^2} + 3\omega_0{}^2\frac{dy}{dt} + 2\omega_0{}^3 y = 10\frac{d^3x}{dt^3}$$

Superposisi

Superposisi digunakan untuk memperoleh output sistem linier stasioner yang inputnya terdiri dari beberapa komponen sinusoidal

Contoh : Carilah output dari sistem yang memiliki fungsi transfer :

$$H(j\omega) = \frac{10}{1 + j\omega\tau}$$

dengan $\tau = 1$ ms

untuk input :

$$x(t) = 5 + 4\cos\omega_0 t + 3\cos\left(2\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right); \quad \text{dengan } \omega_0 = 1\,\text{krad/s}$$

Jawab :

Gain dan pergeseran fasa sistem

$$\Gamma(\omega) = \frac{10}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$$

$$\phi(\omega) = \angle 10 - \angle 1 + j\omega\tau$$
$$= 0 - \tan^{-1}\left(\frac{\omega\tau}{1}\right)$$

Output untuk komponen DC $x_o = 5$

$y_0 = H(0)x_0 = (10)(5) = 50$

Output untuk $x_1(t) = 4\cos\omega t$

$y_1(t) = \Gamma(\omega_0)\, 4\cos[\omega_0 t + \phi(\omega_0)] = 28{,}3\cos(\omega_0 t - \pi/4)$

Output untuk $x_2(t) = 3\cos(2\omega_0 t - \pi/2)$ adalah

$$y_2(t) = \Gamma(2\omega_0)3\cos\left[2\omega_0 t - \frac{\pi}{2} + \phi(2\omega_0)\right]$$
$$= 13{,}4\cos(2\omega_0 t - 2{,}68)$$

dengan superposisi

$y(t) = y_0 + y_1(t) + y_2(t)$

$$= 50 + 28{,}3\cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{4}\right) + 13{,}4\cos(2\omega_0 t - 2{,}68)$$

Latihan :

Carilah output untuk sistem yang memiliki fungsi transfer berikut untuk input

$$x(t) = 5 + 4\cos\omega_0 t + 3\cos\left(2\omega_0 - \frac{\pi}{2}\right)\ \text{V}$$

$$(a)\ H(j\omega) = \frac{100}{1 + 4j(\omega/\omega_0)}\ \text{mA/V} \qquad (b)\ H(j\omega) = \frac{1\text{-}10j(\omega/\omega_0)}{1 + 5j(\omega/\omega_0)}\ \text{V/V}$$

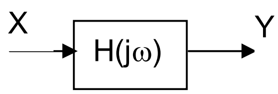
$$(c)\ H(j\omega) = \frac{j(\omega/\omega_0)}{-100\omega^2 + j\omega\omega_0 + 100\omega_0{}^2} \quad \text{V/V} \qquad (d)\ H(j\omega) = \frac{j(\omega/\omega_0)}{1 + j(\omega/\omega_0)} \quad \text{V/V}$$

$$(e)\ H(j\omega) = \frac{2}{[1 + j(\omega/\omega_0)][2 + j(\omega/\omega_0)]} \quad \text{mA/V} \qquad (f)\ H(j\omega) = \frac{5}{0{,}5 + j(\omega/\omega_0)} \quad \text{V/V}$$

$$(g)\ H(j\omega) = 5e^{-j\pi\omega/\omega_0} \quad \text{mA/V}$$

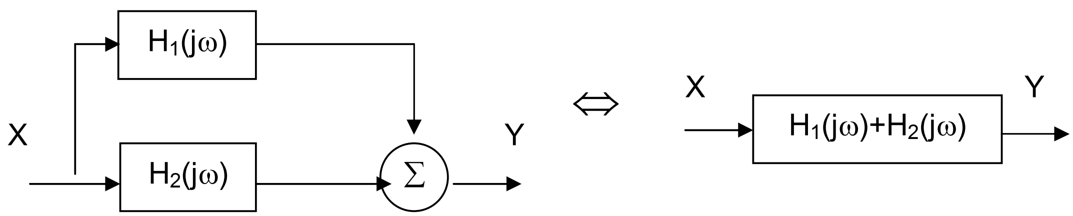
3.7. Reduksi Diagram Blok

Fungsi Transfer dapat dinyatakan dengan diagram blok sebagai berikut :

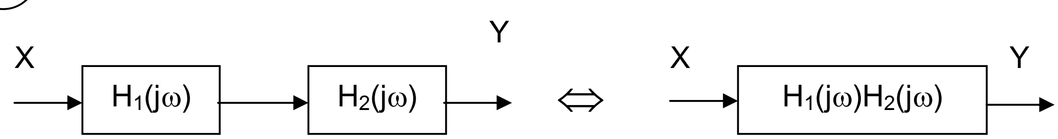


Y = H(jω)X

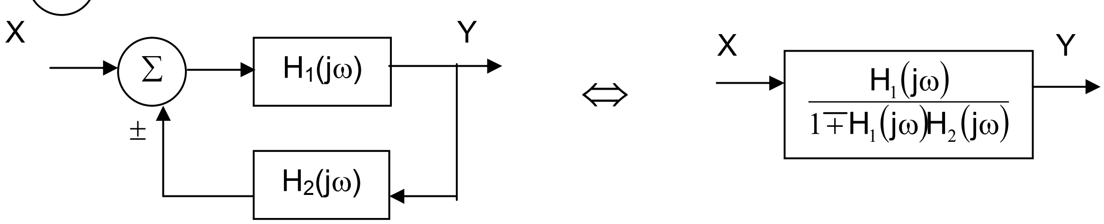
1



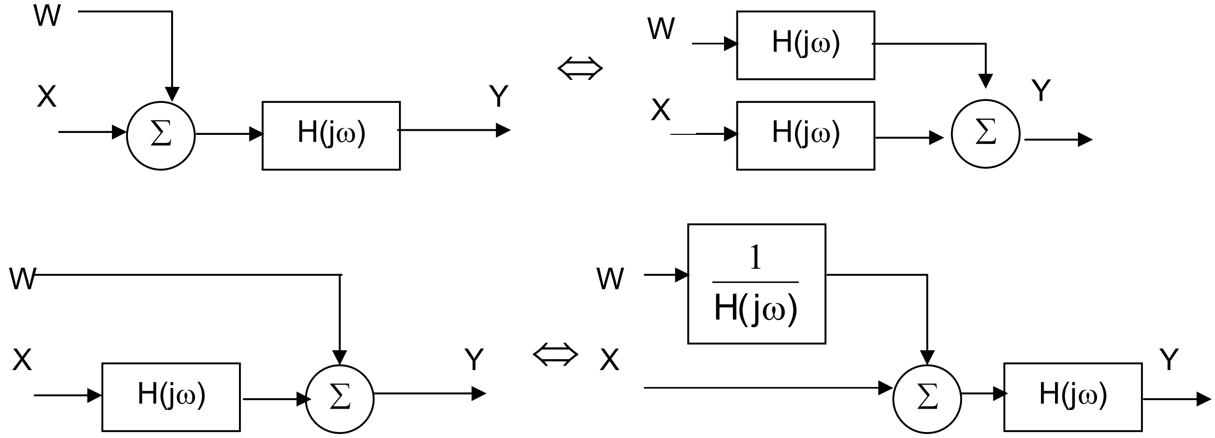
2



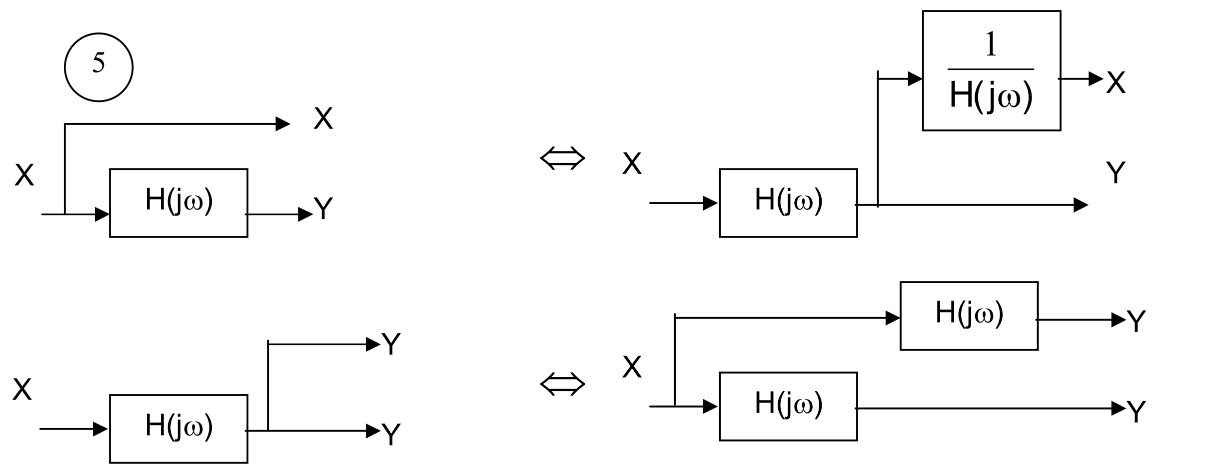
3



4

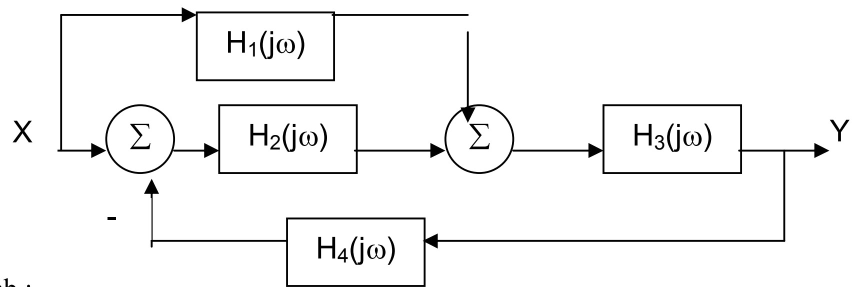

W
X
Σ
H(jω)
Y
⇔
W
H(jω)
X
H(jω)
Σ
Y
W
X
H(jω)
Σ
Y
⇔
W
1/H(jω)
X
Σ
H(jω)
Y

5


X
X
H(jω)
Y
⇔
X
H(jω)
1/H(jω)
X
Y
X
H(jω)
Y
Y
⇔
X
H(jω)
Y
H(jω)
Y

Contoh :

Carilah Fungsi Transfer dengan mereduksi diagram blok berikut :



Jawab :