

# MODEL ANTRIAN

Mata Kuliah Pemodelan & Simulasi

Jurusan Teknik Informatika  
Universitas Komputer Indonesia

# Pendahuluan (1)

- Antrian ialah suatu garis tunggu dari nasabah/pelanggan (satuan) yang memerlukan layanan dari satu atau lebih pelayan (fasilitas layanan).
- Antrian timbul disebabkan karena kebutuhan akan layanan melebihi kemampuan (kapasitas) pelayanan atau fasilitas layanan, sehingga pengguna fasilitas yang tiba tidak bisa segera mendapat layanan disebabkan kesibukan layanan.
- Tambahan fasilitas pelayanan dapat diberikan untuk mengurangi antrian atau untuk mencegah timbulnya antrian. Akan tetapi biaya karena memberikan pelayanan tambahan, akan menimbulkan pengurangan keuntungan.
- Sebaliknya sering timbul antrian yang panjang akan mengakibatkan hilangnya pelanggan/nasabah.

# Pendahuluan (2)

- Pada umumnya, sistem antrian dapat diklasifikasikan menjadi sistem yang berbeda-beda dimana teori antrian dan simulasi sering diterapkan secara luas.
- Klasifikasi menurut Hillier & Lieberman :
  1. Sistem pelayanan komersial ; merupakan aplikasi yang sangat luas dari model-model antrian, seperti restoran, kafetaria, toko-toko, salon, butik, supermarket, dll.
  2. Sistem pelayanan bisnis-industri; mencakup lini produksi, sistem material-handling, sistem pergudangan, dan sistem-sistem informasi komputer.
  3. Sistem pelayanan transportasi
  4. Sistem pelayanan sosial; merupakan sistem-sistem pelayanan yang dikelola oleh kantor-kantor & jawatan-jawatan lokal maupun nasional, seperti kantor registrasi SIM & STNK, kantor pos, rumah sakit, puskesmas, dll.

# Komponen Dasar Proses Antrian

## 1. **Kedatangan**

Setiap masalah antrian melibatkan kedatangan (misal : orang, mobil, panggilan telepon untuk dilayani, dll). Unsur ini sering dinamakan proses input. Proses input meliputi sumber kedatangan (calling population), dan cara terjadinya kedatangan yang umumnya merupakan variabel acak.

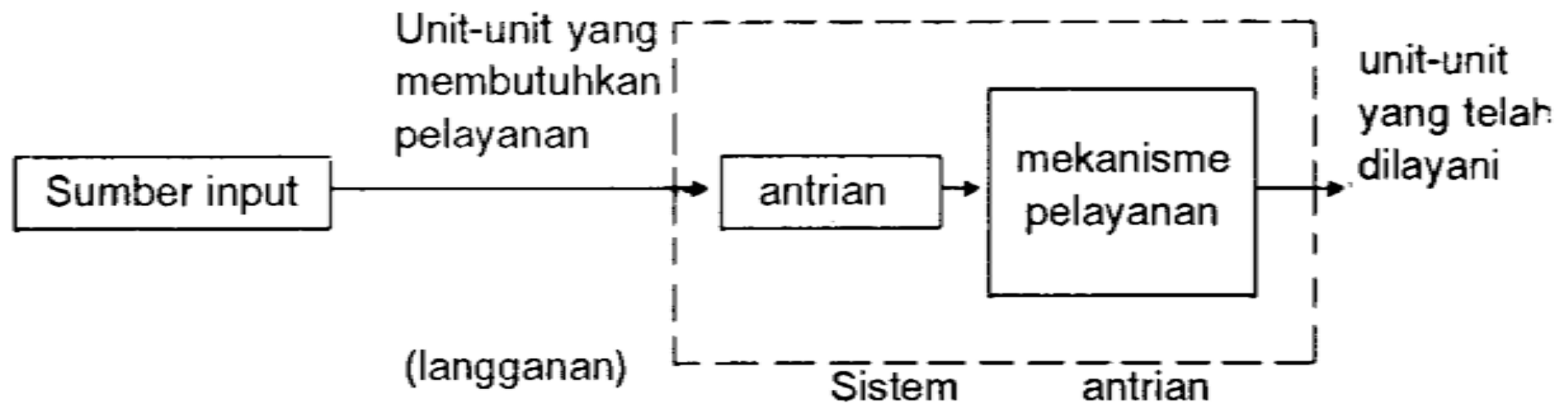
## 2. **Pelayan**

Pelayanan atau mekanisme pelayanan dapat terdiri dari satu atau lebih pelayan (satu atau lebih fasilitas pelayanan). Tiap-tiap fasilitas pelayanan kadang-kadang disebut sebagai saluran (channel).

## 3. **Antri**

Timbulnya antrian terutama tergantung dari sifat kedatangan dan proses pelayanan. Jika tidak ada antrian berarti terdapat pelayan yang menganggur atau kelebihan fasilitas pelayanan.

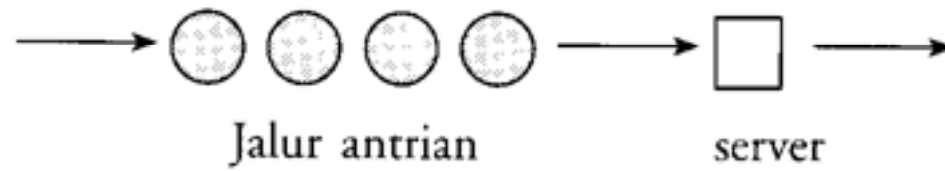
# Struktur Dasar Model Antrian



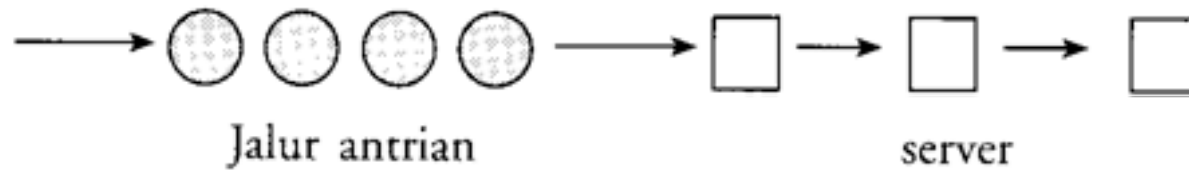
Ada 4 struktur dasar berdasarkan fasilitas pelayanan :

- Single Channel Singel Phase
- Single Channel Multiple Phase
- Multiple Channel Singel Phase
- Multiple Channel Multiple Phase

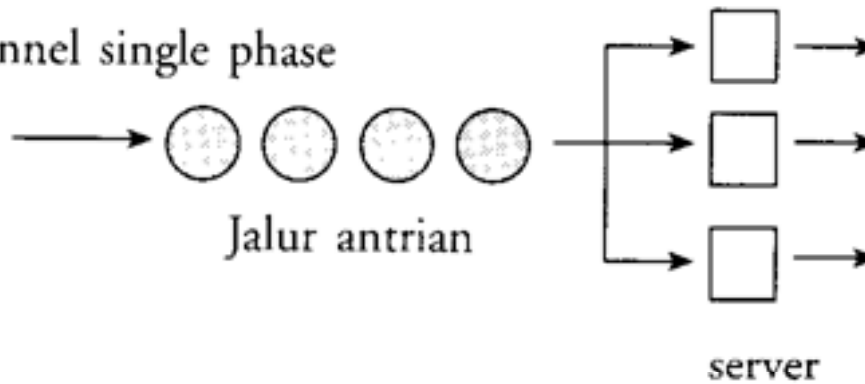
### Single channel single phase



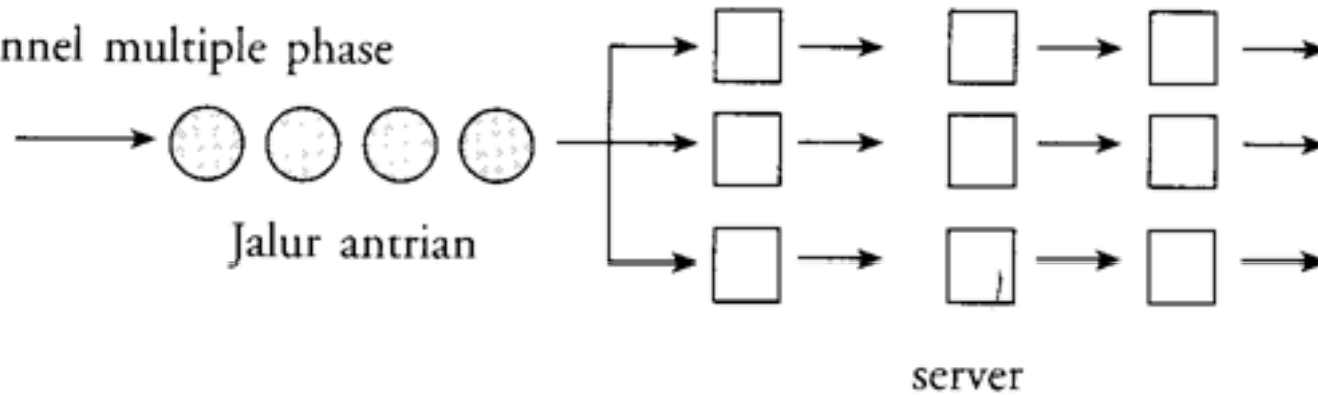
### Single channel multiple phase



### Multiple channel single phase



### Multiple channel multiple phase



# Disiplin Antrian

- Disiplin antri adalah aturan keputusan yang menjelaskan cara melayani pengantri.
- Ada 5 bentuk disiplin antrian yang biasa digunakan :
  1. **First-Come First-Served (FCFS)** atau **First-In First-Out (FIFO)** ; artinya lebih dulu datang (sampai), lebih dulu dilayani (keluar).
  2. **Last-Come First-Served (LCFS)** atau **Last-In First-Out (LIFO)**; artinya yang tiba terakhir yang lebih dulu keluar.
  3. **Service In Random Order (SIRO)**; artinya panggilan layanan didasarkan pada peluang secara random, tidak soal siapa yang lebih dulu tiba.
  4. **Priority Service (PS)** ; artinya prioritas pelayanan diberikan kepada pelanggan yang mempunyai prioritas lebih tinggi dibandingkan dengan pelanggan yang mempunyai prioritas lebih rendah, meskipun yang terakhir ini kemungkinan sudah lebih dulu tiba dalam garis tunggu.

# Mekanisme Pelayanan (1)

Ada 3 aspek yang harus diperhatikan dalam mekanisme pelayanan :

## 1. **Tersedianya pelayanan**

Mekanisme pelayanan tidak selalu tersedia untuk setiap saat (pelayanan tersedia pada periode waktu tertentu).

## 2. **Kapasitas pelayanan**

Kapasitas dari mekanisme pelayanan diukur berdasarkan jumlah langganan yang dapat dilayani secara bersama-sama. Kapasitas pelayanan tidak selalu sama untuk setiap saat; ada yang tetap, tapi ada juga yang berubah-ubah. Karena itu fasilitas pelayanan dapat memiliki satu atau lebih saluran. Fasilitas yang mempunyai satu saluran disebut saluran tunggal atau sistem pelayanan tunggal dan fasilitas yang mempunyai lebih dari satu saluran disebut saluran ganda atau pelayanan ganda.



# Mekanisme Pelayanan (2)

## 3. Lamanya pelayanan

Lamanya pelayanan adalah waktu yang dibutuhkan untuk melayani seorang langganan atau satu-satuan. Ini harus dinyatakan secara pasti. Oleh karena itu, waktu pelayanan boleh tetap dari waktu ke waktu untuk semua langganan atau boleh juga berupa variabel acak.

Umumnya dan untuk keperluan analisis, waktu pelayanan dianggap sebagai variabel acak yang terpengaruh secara bebas dan sama serta tidak tergantung pada waktu pertibaan.

# Notasi Umum Model Antrian

Notasi Standar :

$$( a / b / c );( d / e / f )$$

Dimana :

a = distribusi pertibaan/kedatangan (arrival distribution),  
yaitu jumlah pertibaan pertambahan waktu.

b = distribusi waktu pelayanan/perberangkatan, yaitu  
selang waktu antara satuan-satuan yang dilayani  
(berangkat)

c = jumlah saluran pelayanan/fasilitas pelayanan dalam  
sistem ( $s = 1, 2, 3, \dots, \infty$ )

d = disiplin pelayanan

f = jumlah konsumen maksimum yang diperkenankan  
dalam sistem (dalam pelayanan ditambah garis tunggu)

## Keterangan :

1. Untuk huruf a dan b, dapat digunakan kode-kode berikut sebagai pengganti :

M = Distribusi Poisson atau distribusi pelayanan (perberangkatan) eksponensial; juga sama dengan distribusi waktu antara pertibaan eksponensial atau distribusi satuan yang dilayani Poisson

D = Antar pertibaan atau waktu pelayanan tetap

G = Distribusi umum perberangkatan atau waktu pelayanan.

2. Untuk huruf c, dipergunakan bilangan bulat positif yang menyatakan jumlah pelayanan paralel.
3. Untuk huruf d, gunakan kode-kode pengganti FIFO, LIFO, atau SIRO.

4. Untuk huruf e dan f, digunakan kone N (untuk menyatakan jumlah terbatas) atau  $\infty$  (tak berhingga satuan-satuan dalam sistem antrian dan populasi masukan)

Contoh :

model  $(M/M/1);(FIFO/\infty/\infty)$

artinya : model menyatakan pertibaan didistribusikan secara poisson, waktu pelayanan didistribusikan secara eksponensial, pelayanan adalah satu/seseorang, disiplin antrian adalah First-In First-Out, tidak berhingga jumlah langganan yang boleh masuk dalam sistem antrian, dan ukuran (besarnya) populasi masukkan adalah tak berhingga.

# Model (M / M / 1 );(FIFO/ $\infty$ / $\infty$ )

## Karakteristik :

### 1. Intensitas Lalu-Lintas

Disebut juga tingkat kegunaan fasilitas ( $\rho$ ), adalah hasil bagi antara laju pertibaan dan laju pelayanan. Makin besar harga  $\rho$  maka makin panjang antrian dan sebaliknya.

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

$\lambda$  = Tk rata-rata kedatangan per satuan waktu  
(unit/waktu)

$\mu$  = Tk rata-rata pelayanan per satuan waktu  
(unit/waktu)

## 2. Periode Sibuk

Jika mekanisme pelayanan sibuk, dapat dikatakan sistem antrian sedang dalam periode sibuk. Peluang sistem antrian sedang dalam keadaan sibuk pada saat sembarang, dinamakan peluang sibuk atau peluang menunggu pelanggan. Peluang periode sibuk dari sistem antrian dengan pelayanan tunggal sama dengan intensitas lalu-lintas.

$$P_w = \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

$P_w$  = Peluang pelanggan menunggu dalam sistem/peluang pelayanan dalam sistem sibuk

### 3. Distribusi Peluang dari Langganan dalam Sistem

Jika  $\rho$  adalah peluang bahwa sistem antrian sibuk, maka  $1-\rho$  adalah sebaliknya (artinya peluang bahwa sistem antrian tidak mempunyai pelanggan)

$$P_0 = 1 - \rho \quad , n = 0$$

$$P_n = \rho^n P_0 \quad , n \neq 0$$

maka :

$$P_n = \rho^n (1 - \rho) = \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^n \left( 1 - \frac{\lambda}{\mu} \right)$$

$n$  = Jumlah individu dalam sistem

$P_0$  = Peluang tidak ada individu dalam sistem

$P_n$  = Peluang adanya  $n$  individu dalam sistem

#### 4. Jumlah Rata-Rata dalam Sistem

Misal  $L_s$  merupakan jumlah rata-rata pelanggan dalam sistem yang mencakup pelanggan yang menunggu dan yang sedang dilayani.

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{\rho}{1 - \rho}$$

#### 5. Jumlah Rata-Rata dalam Antrian

Misal  $L_q$  merupakan jumlah rata-rata pelanggan dalam antrian.

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{\rho^2}{1 - \rho}$$



## 6. Waktu Rata-Rata dalam Sistem

Misal  $W_s$  merupakan waktu rata-rata bahwa seorang pelanggan akan menghabiskan waktunya dalam sistem.

$$W_s = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

## 7. Waktu Rata-Rata dalam Antrian

Misal  $W_q$  merupakan waktu rata-rata yang diperlukan seorang pelanggan untuk menerima pelayanan.

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

## CONTOH :

Sebuah minimarket mempunyai satu cash register dan satu orang petugas kasir untuk mengoperasikannya dalam transaksi pembayaran terhadap konsumen. Konsumen harus antri dalam satu jalur di depan kasir untuk membayar belanjanya. Tingkat rata-rata kedatangan konsumen 24 konsumen per jam dan sesuai dengan distribusi Poisson. Waktu pelayanan berdistribusi eksponensial dengan tingkat rata-ratanya adalah 30 konsumen per jam. Evaluasi karakteristik operasional dari sistem antrian tersebut.

- a. Probabilitas tidak ada konsumen dalam sistem
- b. Rata-rata jumlah konsumen dalam antrian
- c. Rata-rata jumlah konsumen dalam sistem
- d. Rata-rata waktu dalam antrian
- e. Rata-rata waktu dalam sistem
- f. Tingkat kegunaan fasilitas cash register

## Model (M / M / s / $\infty$ / $\infty$ )

- Merupakan model antrian fasilitas pelayanan (server) ganda.
- Diasumsikan rata-rata tingkat kedatangan lebih kecil daripada tingkat pelayanan keseluruhan (agregat) atau penjumlahan segenap rata-rata tingkat pelayanan di tiap jalur.
- Syarat & kondisi lain sama dengan Model Server Tunggal

Probabilitas bahwa tidak ada konsumen dalam sistem (semua server menganggur) :

$$P_0 = \frac{1}{\left[ \sum_{n=0}^{s-1} \frac{1}{n!} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^n \right] + \frac{1}{s!} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^s \left( \frac{s\mu}{s\mu - \lambda} \right)}$$

Probabilitas bahwa seorang konsumen memasuki sistem dan harus menunggu untuk dilayani (probabilitas semua server sibuk) :

$$P_w = \frac{1}{s!} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^s \left( \frac{s\mu}{s\mu - \lambda} \right) P_0$$

Rata-rata jumlah konsumen dalam sistem dan antrian masing-masing :

$$L_s = \frac{\lambda \mu (\lambda / \mu)^s}{(s-1)! (s\mu - \lambda)^2} P_0 + \frac{\lambda}{\mu} \quad L_q = L_s - \frac{\lambda}{\mu}$$

Rata-rata waktu dalam sistem dan rata-rata waktu antrian masing-masing :

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda}$$

$$W_q = W_s - \frac{1}{\mu}$$

Tk kegunaan fasilitas :

$$\rho = \frac{\lambda}{s\mu}$$

## CONTOH :

Sebuah departemen store mempunyai bagian khusus yang menangani masalah dan keluhan konsumen terhadap transaksi pembayaran melalui kartu kredit. Bagian ini mempunyai tiga petugas pelayanan dan konsumen yang datang harus menunggu giliran untuk mendapatkan pelayanan, tempat duduk di ruang tunggu diatur hanya satu baris. Konsumen yang datang pertama dilayani lebih dulu. Berdasarkan pengamatan selama 6 bulan, menunjukkan rata-rata ada 10 konsumen yang datang tiap jam (sesuai distribusi Poisson), dan rata-rata ada 4 konsumen per jam bisa dilayani oleh tiap petugas (berdistribusi Poisson). Evaluasi karakteristik operasional dari sistem antrian tersebut.

- a. Probabilitas tidak ada konsumen dalam sistem
- b. Rata-rata jumlah konsumen dalam antrian
- c. Rata-rata jumlah konsumen dalam sistem
- d. Rata-rata waktu dalam antrian
- e. Rata-rata waktu dalam sistem
- f. Tingkat kegunaan fasilitas cash register

## CONTOH KASUS ANTRIAN

**Kasus :** Restoran XY merupakan restoran yang memberikan layanan Pesan-Antar kepada konsumennya. Permasalahan muncul pada proses pengiriman pesanan yang dijadwalkan dengan pasti untuk suatu area restoran.

### Ruang Lingkup & Asumsi :

- Restoran XY memiliki 10 area pengiriman yang tersebar di wilayah Surabaya dan Sidoarjo.
- Jumlah pesanan, jenis pesanan serta harga pesanan tidak diperhitungkan pada proses pengiriman pesanan.
- Setiap pesanan disediakan dalam waktu 60 detik.
- Data pengamatan yang digunakan adalah 150 kejadian dalam satu hari yang diambil pada bulan tertentu dan pada segmen waktu tertentu.
- Restoran XY hanya mempunyai 17 orang karyawan yang bertugas melakukan pengiriman pesanan.
- Pengiriman pesanan dilakukan menurut urutan pesanan, bukan berdasarkan wilayah tujuan pengiriman.
- Bilangan acak yang digunakan adalah bilangan acak berdistribusi Uniform yang dibangkitkan dengan menggunakan metode tertentu dan setiap variabel-variabel antrian menggunakan bilangan acak yang berbeda.

### Data Pegamatan :

- **Data tujuan dan durasi waktu pengiriman** untuk masing-masing area pengiriman pesanan :

No.	Wilayah	Durasi (menit)
1	Darmo Satelit	25
2	Benowo	30
3	Citra Raya	15
4	Manukan/Balong Sari	25
5	Margo Mulyo	25
6	Diponegoro	25
7	Dukuh Kupang	20
8	Gunung Sari	25
9	Ketintang	25
10	Sepanjang	30

- **Data antar kedatangan telepon konsumen** pada segmen waktu 06.00 – 07.00

No.	Batas Bawah	Batas Atas	Frekuensi
1	15	47	21
2	48	80	12
3	81	113	18
4	114	146	25
5	147	179	17
6	180	212	19
7	213	245	21
8	246	278	17

- **Data lama telepon konsumen** pada segmen waktu 06.00 – 07.00

No.	Batas Bawah	Batas Atas	Frekuensi
1	49	78	18
2	79	108	10
3	109	138	19
4	139	168	27
5	169	198	20
6	199	228	21
7	229	258	15
8	259	288	20

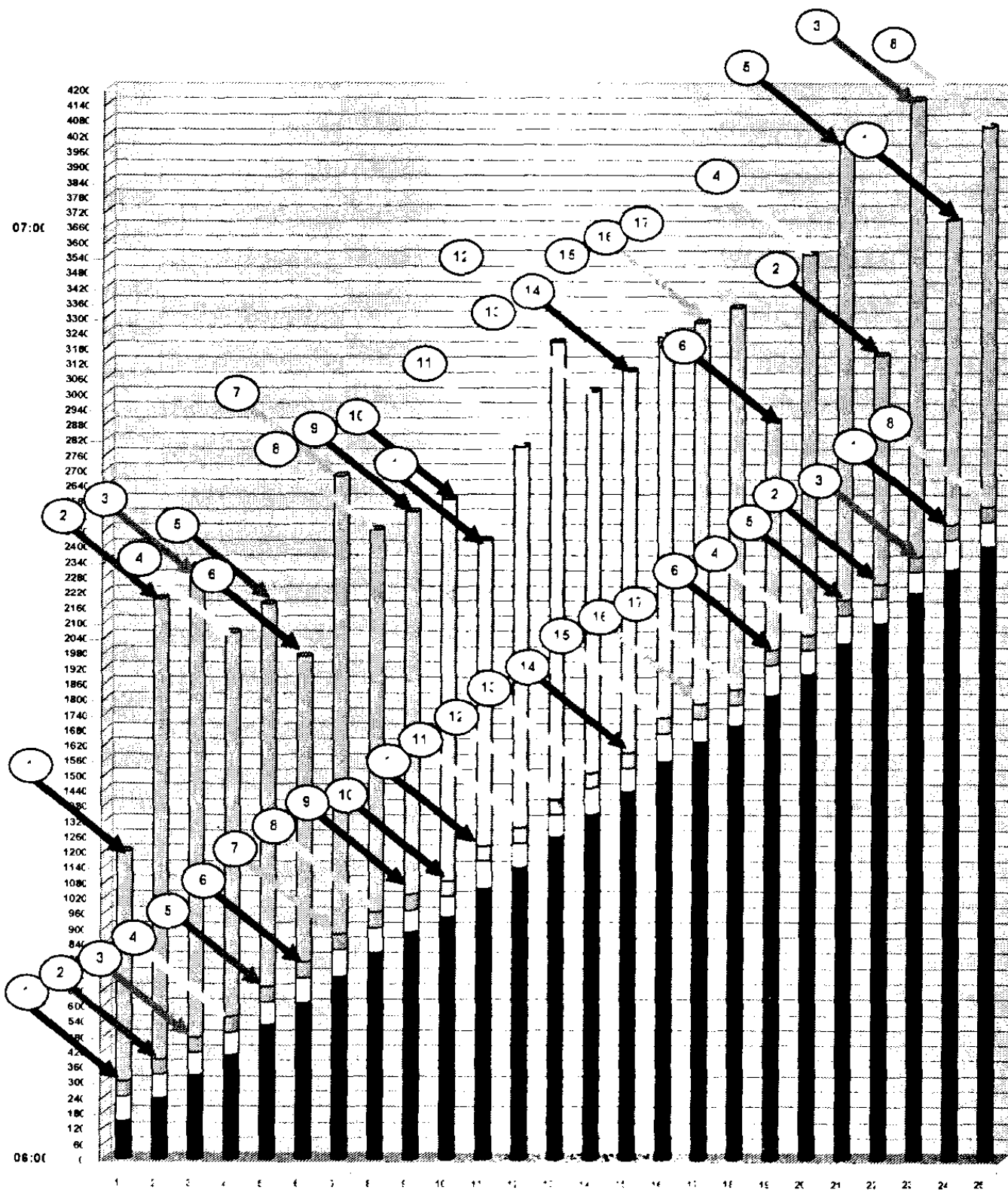
#### **Menentukan Variabel Simulasi:**

- Data antar kedatangan telepon berisi data jarak antar kedatangan telepon satu konsumen dengan konsumen yang lain, merupakan fungsi waktu yang bersifat probabilistik dan diasumsikan berdistribusi Normal.
- Data lama telepon, berisi data lama telepon setiap konsumen yang merupakan fungsi waktu yang bersifat probabilistik dan diasumsikan berdistribusi Normal.
- Data tujuan Pengiriman, berisi data tujuan pengiriman yang berpengaruh pada lama pengiriman, bukan merupakan fungsi waktu dan bersifat deterministik karena lama pengiriman telah ditentukan untuk tiap lokasi.

#### **Penyelesaian Simulasi :**

- Variabel antar kedatangan telepon dan lama telepon saat transaksi dianggap berdistribusi Normal, sehingga bilangan acak yang dibangkitkan bersifat Uniform ( $U[0,1]$ ) dan dihitung dengan rumus variabel acak berdistribusi Normal.
- Variabel tujuan pengiriman membutuhkan angka acak antara 1 – 10, sebanyak berapa kali simulasi dilakukan.





Keterangan :

- : Kumulatif kedatangan telepon
- : Lama telepon konsumen
- : Lama pelayanan (waktu menyiapkan pesanan)
- : Durasi pengiriman (waktu pengiriman)

### SIMULASI ANTRIAN PENGIRIMAN PESANAN DARI KONSUMEN

No	Bilangan Acak yang Dibangkitkan			Simulasi									
	Antar Kedatangan Telepon	Lama Telepon	Tujuan Pengiriman	Antar Kedatangan Telepon	Kumulatif Kedatangan Telepon	Lama Telepon	Waktu Pelayanan dalam detik	Waktu Selesai Dilayani	Tujuan Pengiriman	Waktu Tempuh	Waktu Tempuh dalam detik	Total Waktu Pelayanan	Petugas Pengiriman
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	0.05	0.12	3	146	146	96	60	302	Citra Raya	15	900	1202	1
2	0.64	0.99	10	92	238	94	60	392	Sepanjang	30	1800	2192	2
3	0.94	0.32	2	89	327	90	60	477	Bewono	30	1800	2277	3
4	0.65	0.46	6	83	410	89	60	559	Diponegoro	25	1500	2059	4
5	0.08	0.08	8	115	525	90	60	675	Gn. Sari	25	1500	2175	5
6	0.93	0.48	7	88	613	96	60	769	D. Kupang	20	1200	1969	6
7	0.53	0.53	10	103	716	103	60	879	Sepanjang	30	1800	2679	7
8	0.79	0.79	4	92	808	96	60	964	Balong Sari	25	1500	2464	8
9	0.61	0.61	1	78	886	88	60	1034	Darmo Satelit	25	1500	2534	9
10	0.35	0.35	5	62	948	80	60	1088	Margo Mulyo	25	1500	2588	10
11	0.28	0.28	7	110	1058	106	60	1224	D. Kupang	20	1200	2424	1
12	0.88	0.88	1	85	1143	92	60	1295	Darmo Satelit	25	1500	2795	11
13	0.22	0.32	2	117	.....	85	60	.....	.....	.....	.....	.....	.....
14	0.64	0.41	1	89	.....	101	60	.....	.....	.....	.....	.....	.....
15	0.98	0.91	6	88	.....	93	60	.....	.....	.....	.....	.....	.....
16	0.08	0.08	8	118	.....	111	60	.....	.....	.....	.....	.....	.....
17	0.58	0.58	5	79	.....	89	60	.....	.....	.....	.....	.....	.....
18	0.39	0.39	9	65	.....	81	60	.....	.....	.....	.....	.....	.....
19	0.22	0.22	3	119	.....	115	60	.....	.....	.....	.....	.....	.....
20	0.85	0.75	5	84	.....	90	60	.....	.....	.....	.....	.....	.....
21	0.29	0.29	10	116	.....	111	60	.....	.....	.....	.....	.....	.....
22	0.82	0.77	3	83	.....	93	60	.....	.....	.....	.....	.....	.....
23	0.31	0.45	2	117	.....	83	60	.....	.....	.....	.....	.....	.....
24	0.74	0.27	7	96	.....	112	60	.....	.....	.....	.....	.....	.....
25	0.75	0.75	4	88	.....	94	60	.....	.....	.....	.....	.....	.....

Keterangan :

A dan B : Dibangkitkan dengan metode tertentu dan bersifat Uniform

C : Menggunakan bilangan acak 1 – 10

D, F dan I : Masing-masing dihitung dan diperoleh berdasarkan bilangan acak (A, B atau C)

H :  $E + F + G$

K :  $J \times 60$  detik

L :  $H + K$