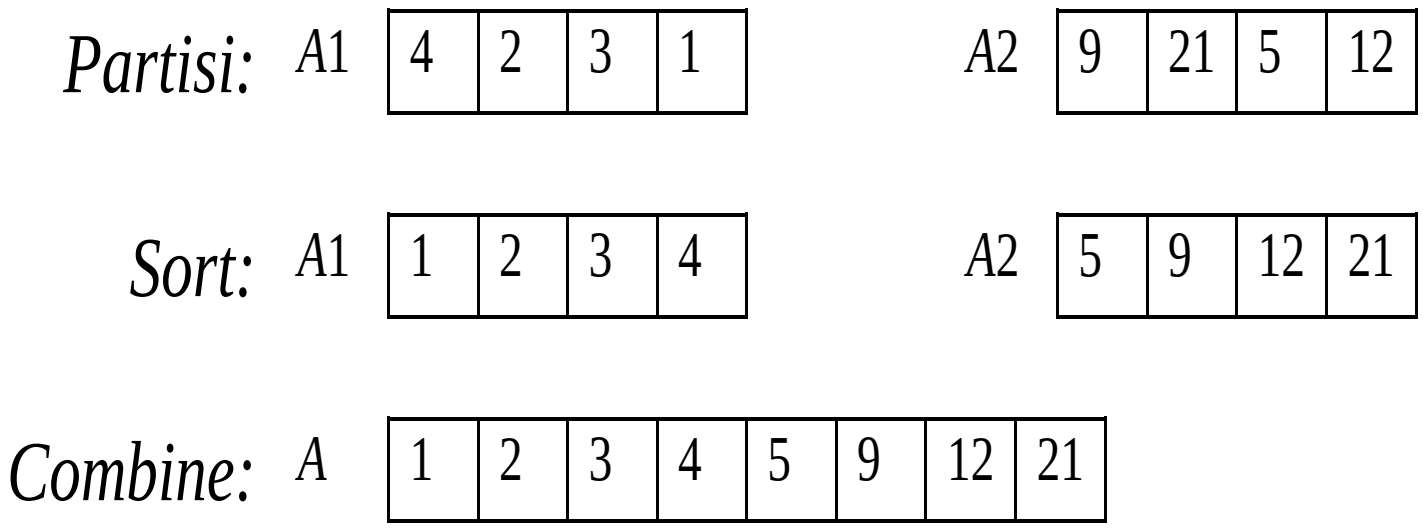
Algoritma *Divide and Conquer*

(Bagian 2)

(c) Quick Sort

- Termasuk pada pendekatan sulit membagi, mudah menggabung *(hard split/easy join)*

- Tabel *A* dibagi (istilahnya: dipartisi) menjadi *A*1 dan *A*2 sedemikian sehingga elemen-elemen *A*1 $\leq$ elemen-elemen *A*2.


Partisi:
A1
4
2
3
1
A2
9
21
5
12
Sort:
A1
1
2
3
4
A2
5
9
12
21
Combine:
A
1
2
3
4
5
9
12
21

Teknik mem-partisi tabel:

(i) pilih $x \in \{ A[1], A[2], ..., A[n] \}$ sebagai *pivot*,

(ii) pindai tabel dari kiri sampai ditemukan $A[p] \geq x$

(iii) pindai tabel dari kanan sampai ditemukan $A[q] \leq x$

(iv) pertukarkan $A[p] \Leftrightarrow A[q]$

(v) ulangi (ii), dari posisi $p + 1$, dan (iii), dari posisi $q - 1$, sampai kedua pemindaian bertemu di tengah tabel

Contoh 4.6. Misalkan tabel *A* berisi elemen-elemen berikut:

	8	1	4	6	9	3	5	7

Langkah-langkah partisi:

(i):

	8	1	4	6	9	3	5	7
				pivot				

(ii) & (iii):

	→							←
	8	1	4	6	9	3	5	7
	↑*p*						↑*q*	

(iv):

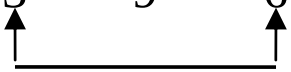
	5	1	4	6	9	3	8	7
	↑						↑	
	———						———	

(ii) & (iii): 5 1 4 6 9 3 8 7

$\rightarrow$ $\leftarrow$

$\uparrow p$ $\uparrow q$

(iv): 5 1 4 3 9 6 8 7



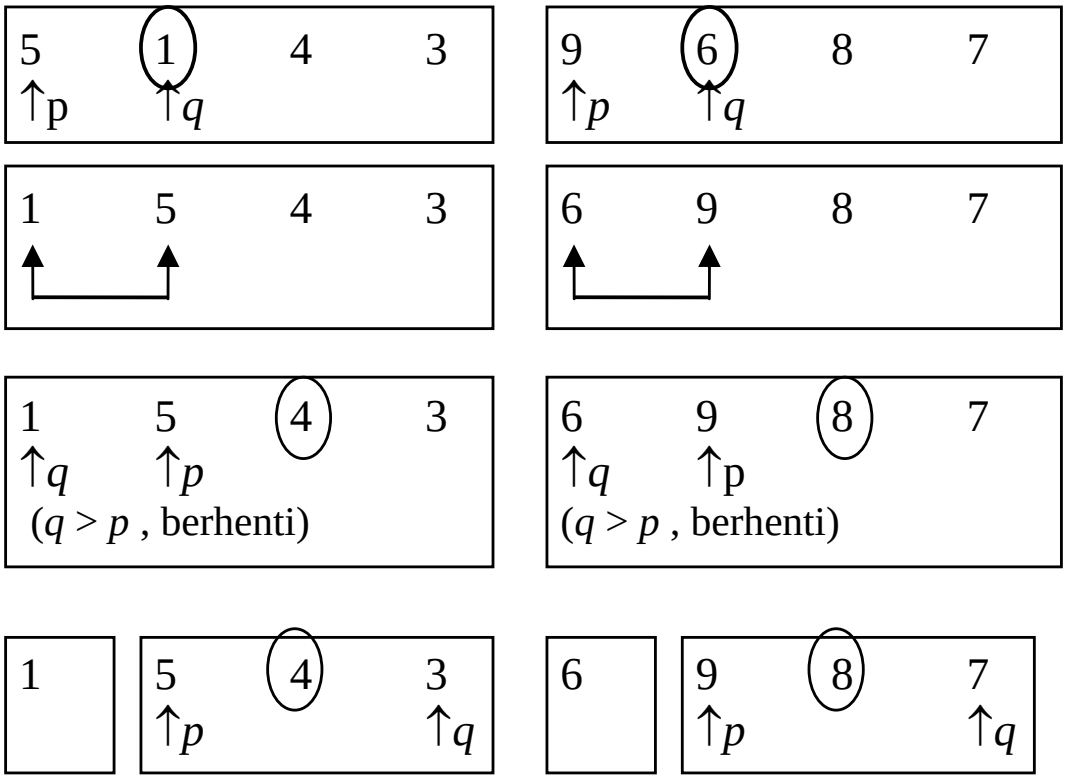
(ii) & (iii): 5 1 4 3 9 6 8 7

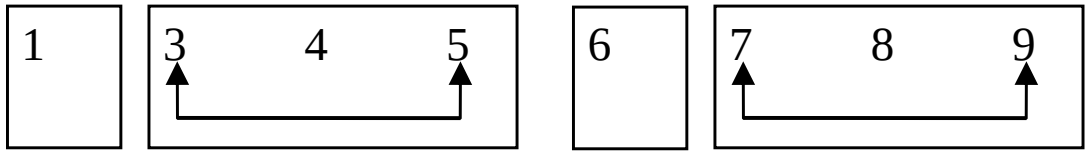
$\rightarrow\leftarrow$

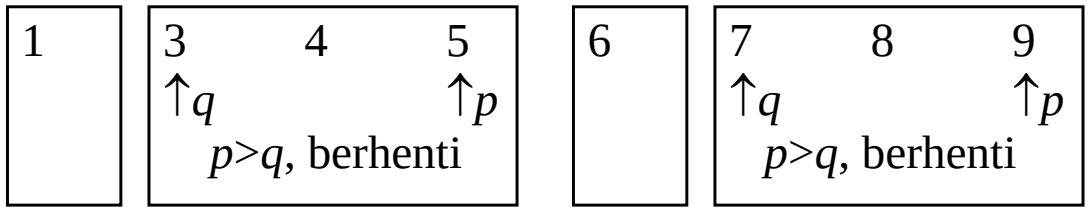
$\uparrow q$ $\uparrow p$ ($q < p$, berhenti)

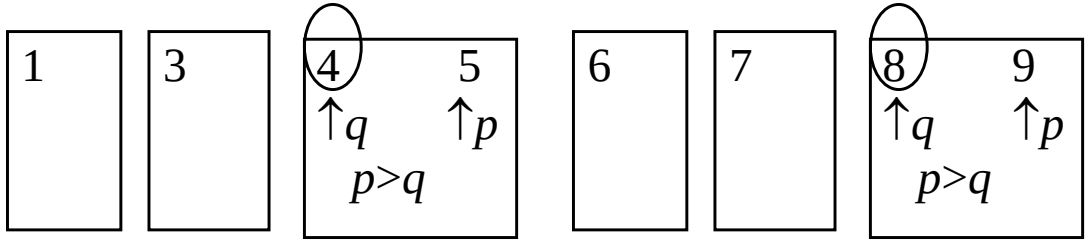
Hasil partisi pertama:

kiri:	5	1	4	3	(< 6)
kanan:	9	6	8	7	(≥ 6)


5 1 4 3
↑p ↑q
9 6 8 7
↑p ↑q
1 5 4 3
6 9 8 7
1 5 4 3
↑q ↑p
(q > p , berhenti)
6 9 8 7
↑q ↑p
(q > p , berhenti)
1
5 4 3
↑p ↑q
6
9 8 7
↑p ↑q


1
3 4 5
6
7 8 9


1
3 4 5
↑q ↑p
p>q, berhenti
6
7 8 9
↑q ↑p
p>q, berhenti


1
3
4 5
↑q ↑p
p>q
6
7
8 9
↑q ↑p
p>q


1
3
4
5
6
7
8
9

(terurut)

Pseudo-code Quick Sort:

```
procedure QuickSort(input/output A : TabelInt, input i,j: integer)

{ Mengurutkan tabel A[i..j] dengan algoritma Quick Sort.
  Masukan: Tabel A[i..j] yang sudah terdefinisi elemen-elemennya.
  Keluaran: Tabel A[i..j] yang terurut menaik.
}
Deklarasi
   k : integer

Algoritma:
    if  i < j then              { Ukuran(A) > 1 }
       Partisi(A, i, j, k)      { Dipartisi pada indeks k }
       QuickSort(A, i, k)       { Urut A[i..k] dengan Quick Sort }
       QuickSort(A, k+1, j)     { Urut A[k+1..j] dengan Quick Sort }
    endif
```

```
procedure Partisi(input/output A : TabelInt, input i, j : integer,
                  output q : integer)

{ Membagi tabel A[i..j] menjadi upatabel A[i..q] dan A[q+1..j]
  Masukan: Tabel A[i..j]yang sudah terdefinisi harganya.
  Keluaran upatabel A[i..q] dan upatabel A[q+1..j] sedemikian sehingga
           elemen tabel A[i..q] lebih kecil dari elemen tabel A[q+1..j]
}
Deklarasi
   pivot, temp : integer

Algoritma:
   pivot←A[(i + j) div 2]    { pivot = elemen tengah}
   p ← i
   q ← j
   repeat
      while A[p] < pivot do
        p ← p + 1
      endwhile
      { A[p] >= pivot}

      while A[q] > pivot do
        q ← q - 1
      endwhile
      { A[q] <= pivot}

      if p ≤ q  then
        {pertukarkan A[p] dengan A[q] }
         temp ← A[p]
         A[p] ← A[q]
         A[q] ← temp

        {tentukan awal pemindaian berikutnya }
        p ← p + 1
        q ← q - 1
      endif
   until p > q
```

- Cara pemilihan *pivot*:

1. *Pivot* = elemen pertama/elemen terakhir/elemen tengah tabel

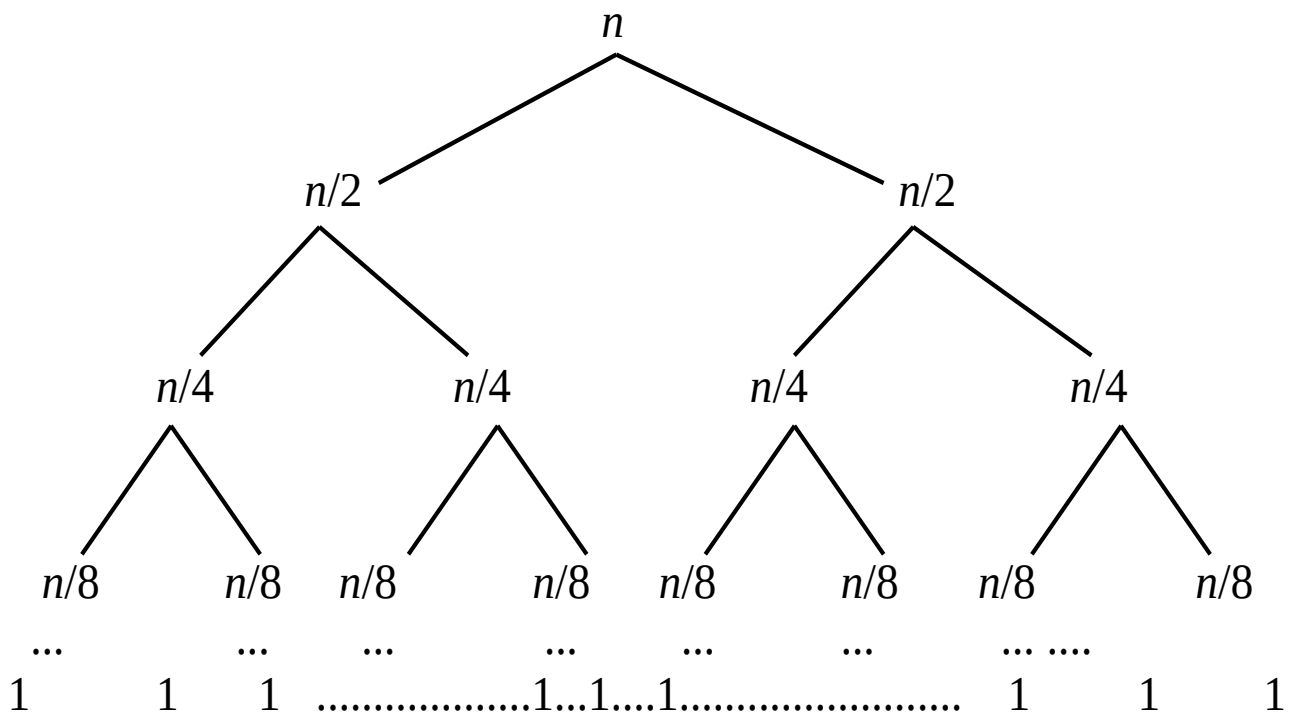
2. *Pivot* dipilih secara acak dari salah satu elemen tabel.

3. *Pivot* = elemen median tabel

Kompleksitas Algoritma Quicksort:

1. *Kasus terbaik (best case)*

- Kasus terbaik terjadi bila *pivot* adalah elemen median sedemikian sehingga kedua upatabel berukuran relatif sama setiap kali pempartisian.


n
n/2
n/2
n/4
n/4
n/4
n/4
n/8
n/8
n/8
n/8
n/8
n/8
n/8
n/8
... ...
1 1 1 .....1...1....1..... 1 1 1

$$T(n) = \begin{cases} a & , n = 1 \\ 2T(n/2) + cn & , n > 1 \end{cases}$$

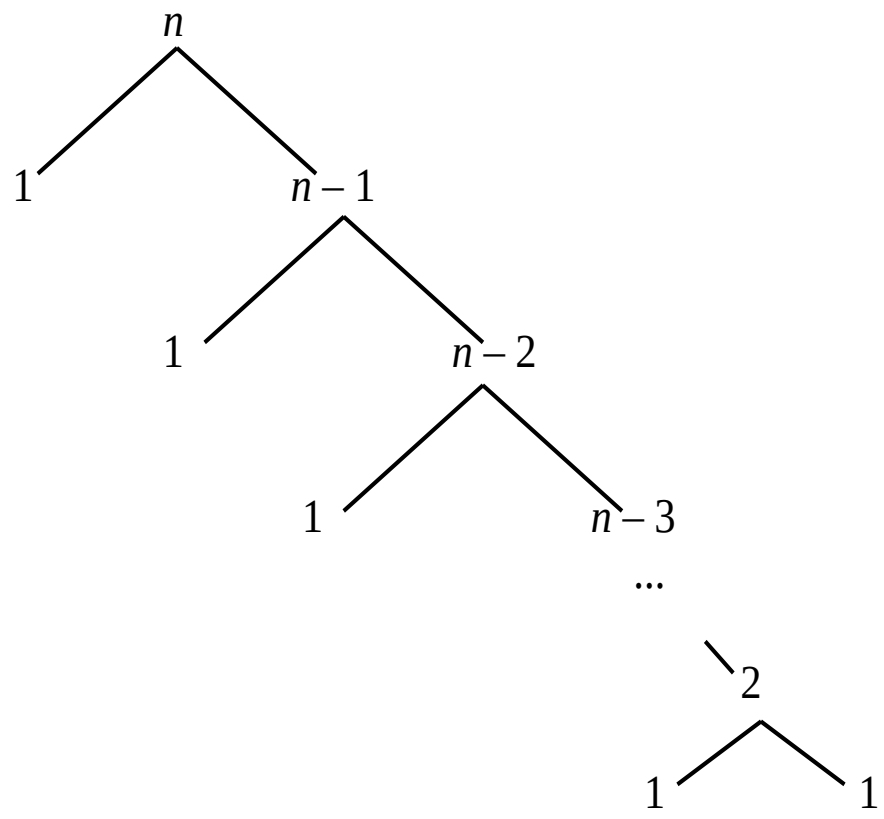
Penyelesaian (seperti pada *Merge Sort*):

$$T(n) = 2T(n/2) + cn = na + \text{cn } {}^2\log n = O(n\ {}^2\log n).$$

2. *Kasus terburuk (worst case)*

- Kasus ini terjadi bila pada setiap partisi *pivot* selalu elemen maksimum (atau elemen minimum) tabel.

- Kasus jika tabel sudah terurut menaik/menurun


n
1
n – 1
1
n – 2
1
n – 3
...
2
1
1

Kompleksitas waktu pengurutan:

$$T(n) = \begin{cases} a & ,n = 1 \\ T(n-1) + cn & ,n > 1 \end{cases}$$

Penyelesaian (seperti pada *Insertion Sort*):

$$T(n) = T(n-1) + cn = O(n^2).$$

3. *Kasus rata-rata (average case)*

- Kasus ini terjadi jika *pivot* dipilih secara acak dari elemen tabel, dan peluang setiap elemen dipilih menjadi *pivot* adalah sama.

- $T_{avg}(n) = O(n^2 \log n)$.

(d) *Selection Sort*

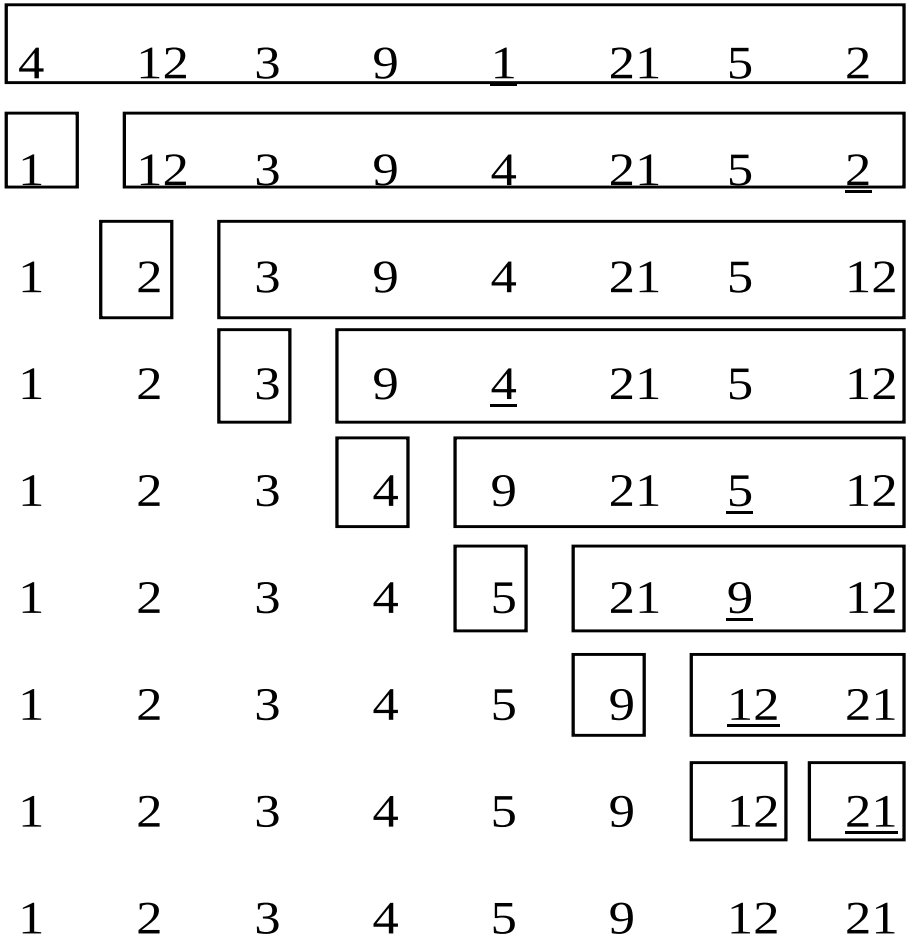
```
procedure SelectionSort(input/output A : TabelInt, input i,j: integer)

{ Mengurutkan tabel A[i..j] dengan algoritma Selection Sort.
  Masukan: Tabel A[i..j] yang sudah terdefinisi elemen-elemennya.
  Keluaran: Tabel A[i..j] yang terurut menaik.
}

Algoritma:
   if  i < j then          { Ukuran(A) > 1 }
     Bagi(A, i, j)
     SelectionSort(A, i+1, j)
   endif
```

```
procedure Bagi(input/output A : TabInt, input i,j: integer)

{ Mencari elemen terkecil di dalam tabel A[i..j], dan menempatkan
elemen terkecil sebagai elemen pertama tabel.

  Masukan: A[i..j]
  Keluaran: A[i..j] dengan Ai adalah elemen terkecil.
}
Deklarasi
  idxmin, k, temp : integer

Algoritma:
  idxmin←i
  for k←i+1 to jdo
    if Ak < Aidxmin then
      idxmin←k
    endif
  endfor

  { pertukarkan Ai dengan Aidxmin }
  temp←Ai
  Ai←Aidxmin
  Aidxmin←temp
```

Contoh 4.5. Misalkan tabel *A* berisi elemen-elemen berikut:

4	12	3	9	1	21	5	2

Langkah-langkah pengurutan dengan *Selection Sort*:



Kompleksitas waktu algoritma:

$$T(n) = \begin{cases} a & ,n = 1 \\ T(n-1) + cn & ,n > 1 \end{cases}$$

Penyelesaian (seperti pada *Insertion Sort*):

$$T(n) = O(n^2).$$

4. Perpangkatan a^n

Misalkan $a \in R$ dan n adalah bilangan bulat tidak negatif:

$a^n = a \times a \times \ldots \times a$ (n kali), jika $n > 0$

$= 1$, jika $n = 0$

Penyelesaian dengan Algoritma Brute Force

```
function Exp1(input a, n : integer)→integer
{ Menghitung a^n, a > 0 dan n bilangan bulat tak-negatif
  Masukan: a, n
  Keluaran: nilai perpangkatan.
}
Deklarasi
  k, hasil : integer

Algoritma:
  hasil←1
  for k←1 to  n do
     hasil←hasil * a
  endfor

  return hasil
```

Kompleksitas waktu algoritma:

$$T(n) = n = O(n)$$

Penyelesaian dengan Divide and Conquer

Algoritma menghitung a^n:

1. Untuk kasus $n = 0$, maka $a^n = 1$.

2. Untuk kasus $n > 0$, bedakan menjadi dua kasus lagi:

   (i) jika n genap, maka $a^n = a^{n/2} \cdot a^{n/2}$

   (ii) jika n ganjil, maka $a^n = a^{n/2} \cdot a^{n/2} \cdot a$

Contoh 4.6. Menghitung 3^{16} dengan metode *Divide and Conquer*:

$$
\begin{aligned}
3^{16} = 3^8 \cdot 3^8 &= (3^8)^2 \\
&= ((3^4)^2)^2 \\
&= (((3^2)^2)^2)^2 \\
&= ((((3^1)^2))^2)^2)^2 \\
&= ((((3^0)^2 \cdot 3)^2)^2)^2)^2 \\
&= ((((1)^2 \cdot 3)^2)^2)^2)^2 \\
&= ((((3)^2))^2)^2)^2 \\
&= (((9)^2)^2)^2 \\
&= (81)^2)^2 \\
&= (6561)^2 \\
&= 43046721
\end{aligned}
$$

```
function Exp2(input a :real, n : integer) → real
{ mengembalikan nilai a^n, dihitung dengan metode Divide and Conquer }

Algoritma:
   if n = 0 then
      return 1
   else
      x←Exp2(a, n div 2)
      if odd(n) then        { fungsi odd memberikan true jika n ganjil }
       return x * x * a
      else
       return x * x
      endif
  endif
```

Kompleksitas algoritma:

$$T(n) = \begin{cases} 0 & ,n = 0 \\ 1 + T(\lfloor n/2 \rfloor) & ,n > 0 \end{cases}$$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} T(n) &= 1 + T(\lfloor n/2 \rfloor) \\ &= 1 + (1 + T(\lfloor n/4 \rfloor) = 2 + T(\lfloor n/4 \rfloor) \\ &= 2 + (1 + T(\lfloor n/8 \rfloor) = 3 + T(\lfloor n/8 \rfloor) \\ &= \ldots \\ &= k + T(\lfloor n/2^k \rfloor) \end{aligned}$$

Persamaan terakhir diselesaikan dengan membuat $n/2^k = 1$,

$$(n/2^k) = 1 \rightarrow \quad \log (n/2^k) = \log 1$$
$$\log n - \log 2^k = 0$$
$$\log n - k \log 2 = 0$$
$$\log n = k \log 2$$
$$k = \log n / \log 2 = {}^2\log n$$

sehingga

$$T(n) = \lfloor {}^2\log n \rfloor + T(1)$$
$$= \lfloor {}^2\log n \rfloor + 1 + T(0)$$
$$= \lfloor {}^2\log n \rfloor + 1 + 0$$
$$= \lfloor {}^2\log n \rfloor + 1$$
$$= O({}^2\log n)$$

5. Perkalian Matriks

- Misalkan A dan B dua buah matrik berukuran $n \times n$.

- Perkalian matriks: $C = A \times B$

Elemen-elemen hasilnya: $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$

Penyelesaian dengan Algoritma Brute Force

```
function KaliMatriks1(input A,B: Matriks, input n : integer)→ Matriks
{ Memberikan hasil kali matriks A dan B yang berukuran n × n.
  Masukan: matriks integer A dan B, ukuran matriks (n)
  Keluaran: matriks C = A × B.
}

Deklarasi
  i, j, k : integer
  C : Matriks

Algoritma:
   for i←1 to n do
     for j←1 to n do
        C_{i,j}←0     { inisialisasi penjumlah }
        for k ← 1 to n do
           C_{i,j} ← C_{i,j} + A_{i,k} * B_{k,j}
        endfor
     endfor
   endfor

   return C
```

Kompleksitas algoritma: $T(n) = n^3 + n^2(n-1) = O(n^3)$.

Penyelesaian dengan Algoritma Divide and Conquer

Matriks A dan B dibagi menjadi 4 buah matriks bujur sangkar. Masing-masing matriks bujur sangkar berukuran $n/2 \times n/2$:

$$\begin{bmatrix} A11 & A12 \\ A21 & A22 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B11 & B12 \\ B21 & B22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C11 & C12 \\ C21 & C22 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} \qquad\qquad \boldsymbol{B} \qquad\qquad \boldsymbol{C}$$

Elemen-elemen matriks C adalah:

$$C11 = A11 \cdot B11 + A12 \cdot B21$$
$$C12 = A11 \cdot B12 + A12 \cdot B22$$
$$C21 = A21 \cdot B11 + A22 \cdot B21$$
$$C22 = A21 \cdot B12 + A22 \cdot B22$$

Contoh 4.7. Misalkan matriks *A* adalah sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 8 & 16 \\ 21 & 5 & 12 & 10 \\ 5 & 1 & 2 & 3 \\ 45 & 9 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Matriks *A* dibagi menjadi 4 upa-matriks 2 x 2:

$$A11 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 21 & 5 \end{bmatrix} \quad A12 = \begin{bmatrix} 8 & 16 \\ 12 & 10 \end{bmatrix} \quad A21 = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 45 & 9 \end{bmatrix} \quad A22 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

```
function KaliMatriks2(input A,B: Matriks, input n : integer) → Matriks
{ Memberikan hasil kali matriks A dan B yang berukuran n × n.
  Masukan: matriks integer A dan B, ukuran matriks (n)
  Keluaran: matriks C = A × B.
}
Deklarasi
  i, j, k : integer
  A11, A12, A21, A22,
  B11, B12, B21, B22,
  C11, C12, C21, C22 : Matriks

Algoritma:
   if n = 1 then
      return A × B   { perkalian biasa }
   else
      Bagi A menjadi A11, A12, A21, dan A22 yang masing-masing
      berukuran n/2 × n/2
      Bagi B menjadi B11, B12, B21, dan B22 yang masing-masing
      berukuran n/2 × n/2
      C11 ← KaliMatriks2(A11, B11, n/2) + KaliMatriks2(A12, B21, n/2)
      C12 ← KaliMatriks2(A11, B12, n/2) + KaliMatriks2(A12, B22, n/2)
      C21 ← KaliMatriks2(A21, B11, n/2) + KaliMatriks2(A22, B21, n/2)
      C22 ← KaliMatriks2(A21, B12, n/2) + KaliMatriks2(A22, B22, n/2)
      return C  { C adalah gabungan C11, C12, C13, C14  }
   endif
```

Pseudo-code algoritma penjumlahan (+), $C = A + B$:

```
function Tambah(input A, B : Matriks, input n : integer) → Matriks
{ Memberikan hasil penjumlahkan dua buah matriks, A dan B, yang
  berukuran n × n.
  Masukan: matriks integer A dan B, ukuran matriks (n)
  Keluaran: matriks C = A + B
}
Deklarasi
  i, j, k : integer

Algoritma:
   for i←1 to n do
     for j←1 to n do
        C(i,j) ← A(i,j) + B(i,j)
     endfor
   endfor
   return C
```

Kompleksitas waktu perkalian matriks seluruhnya adalah:

$$T(n) = \begin{cases} a & ,n = 1 \\ 8T(n/2) + cn^2 & ,n > 1 \end{cases}$$

yang bila diselesaikan, hasilnya adalah:

$$T(n) = O(n^3)$$

Hasil ini tidak memberi perbaikan kompleksitas dibandingkan dengan algoritma *brute force*.

Dapatkah kita membuat algoritma perkalian matriks yang lebih baik?

Algoritma Perkalian Matriks Strassen

Hitung matriks antara:

$$M1 = (A12 - A22)(B21 + B22)$$
$$M2 = (A11 + A22)(B11 + B22)$$
$$M3 = (A11 - A21)(B11 + B12)$$
$$M4 = (A11 + A12)B22$$
$$M5 = A11\ (B12 - B22)$$
$$M6 = A22\ (B21 - B11)$$
$$M7 = (A21 + A22)B11$$

maka,

$$C11 = M1 + M2 - M4 + M6$$
$$C12 = M4 + M5$$
$$C21 = M6 + M7$$
$$C22 = M2 - M3 + M5 - M7$$

Kompleksitas waktu algoritma perkalian matriks Strassen:

$$T(n) = \begin{cases} a & ,n = 1 \\ 7T(n/2) + cn^2 & ,n > 1 \end{cases}$$

yang bila diselesaikan, hasilnya adalah

$$T(n) = O(n^{\log 7}) = O(n^{2.81})$$

6. Perkalian Dua Buah Bilangan Bulat yang Besar

Persoalan: Misalkan bilangan bulat *X* dan *Y* yang panjangnya *n* angka

$$X = x_1 x_2 x_3 \ldots x_n$$
$$Y = y_1 y_2 y3 \ldots y_n$$

Hitunglah hasil kali *X* dengan *Y*.

Contoh 4.8. Misalkan,

$X = 1234 \quad (n = 4)$
$Y = 5678 \quad (n = 4)$

Cara klasik mengalikan X dan Y:

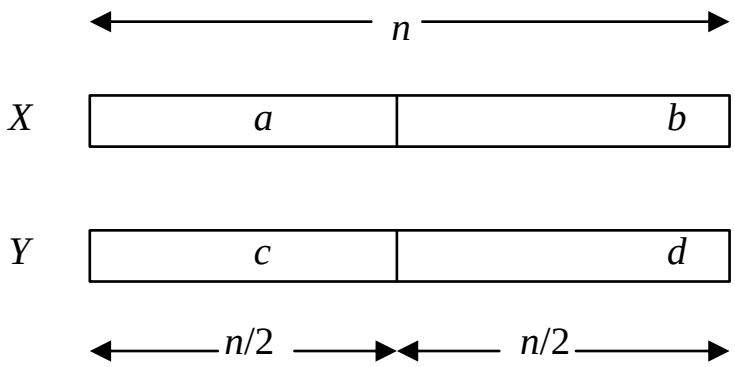
$X \times Y = 1234$
$\underline{5678 \times}$
9872
8368
7404
$\underline{6170 \quad +}$
7006652 (7 angka)

Pseudo-code algoritma perkalian matriks:

```
function Kali1(input X, Y : LongInteger, n : integer) → LongInteger
{ Mengalikan X dan Y, masing-masing panjangnya n digit dengan algoritma
brute force.
  Masukan: X dan Y yang panjangnya n angka
  Keluaran: hasil perkalian
}
Deklarasi
   temp, AngkaSatuan, AngkaPuluhan : integer

Algoritma:
   for setiap angka yi dari yn, yn-1, …, y1 do
      AngkaPuluhan ← 0
      for setiap angka xj dari xn, xn-1, …, x1 do
       temp ← xj * yi
       temp ← temp + AngkaPuluhan
       AngkaSatuan ← temp mod 10
       AngkaPuluhan ← temp div 10
       tuliskan AngkaSatuan
      endfor
   endfor
   Z ← Jumlahkan semua hasil perkalian dari atas ke bawah
   return Z
```

Kompleksitas algoritma: $O(n^2)$.

Penyelesaian dengan Algoritma Divide and Conquer



$s = n \underline{\text{div}}\ 2$

$a = X \underline{\text{div}}\ 10^s$
$b = X \underline{\text{mod}}\ 10^s$
$c = Y \underline{\text{div}}\ 10^s$
$d = Y \underline{\text{mod}}\ 10^s$

X dan *Y* dapat dinyatakan dalam *a*, *b*, *c*, *d*, dan *s* sebagai

$X = a \cdot 10^s + b$
$Y = c \cdot 10^s + d$

Contoh,

$$X = 346769 = 346 \cdot 10^3 + 769$$
$$Y = 279431 = 279 \cdot 10^3 + 431$$

Perkalian X dengan Y dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned} X \cdot Y &= (a \cdot 10^s + b) \cdot (c \cdot 10^s + d) \\ &= ac \cdot 10^{2s} + ad \cdot 10^s + bc \cdot 10^s + bd \\ &= ac \cdot 10^{2s} + (ad + bc) \cdot 10^s + bd \end{aligned}$$

Pseudo-code perkalian *X* dan *Y*:

```
function Kali2(input X, Y : LongInteger, n : integer) → LongInteger
{ Mengalikan X dan Y, masing-masing panjangnya n digit dengan algoritma
Divide and Conquer.
  Masukan: X dan Y
  Keluaran: hasil perkalian X dan Y
}
Deklarasi
   a, b, c, d : LongInteger
   s : integer

Algoritma:
   if n = 1 then
      return X * Y     { perkalian biasa }
   else
      s←n div 2        { bagidua pada posisi s }
      a←X div 10^s
      b←X mod 10^s
      c← Y div 10^s
      d← Y mod 10^s
      return Kali2(a, c, s)*10^2s + Kali2(b, c, s)*10^s +
             Kali2(a, d, s)*10^s + Kali2(b, d, s)
  endif
```

Kompleksitas waktu algoritma:

$$T(n) = \begin{cases} a & ,n = 1 \\ 4T(n/2) + cn & ,n > 1 \end{cases}$$

- Penyelesaian:

  $T(n) = O(n^2)$.

- Ternyata, perkalian dengan algoritma *Divide and Conquer* seperti di atas belum memperbaiki kompleksitas waktu algoritma perkalian secara *brute force*.

- Adakah algoritma perkalian yang lebih baik?

Perbaikan (A.A Karatsuba, 1962):

Misalkan

$$r = (a + b)(c + d) = ac + (ad + bc) + bd$$

maka,

$$(ad + bc) = r - ac - bd = (a + b)(c + d) - ac - bd$$

Dengan demikian, perkalian X dan Y dimanipulasi menjadi

$$X \cdot Y = ac \cdot 10^{2s} + (ad + bc) \cdot 10^{s} + bd$$

$$= \underbrace{ac}_{p} \cdot 10^{2s} + \{\underbrace{(a+b)(c+d)}_{r} - \underbrace{ac}_{p} - \underbrace{bd}_{q}\} \cdot 10^{s} + \underbrace{bd}_{q}$$

```
function Kali3(input X, Y : LongInteger, n : integer) → LongInteger
{ Mengalikan X dan Y, masing-masing panjangnya n digit dengan algoritma
Divide and Conquer.
  Masukan: X dan Y
  Keluaran: hasil perkalian X dan Y
}
Deklarasi
   a, b, c, d : LongInteger
   s : integer

Algoritma:
   if n = 1 then
      return X * Y     { perkalian biasa }
   else
      s←n div 2        { bagidua pada posisi s }
      a←X div 10^s
      b←X mod 10^s
      c← Y div 10^s
      d← Y mod 10^s
      p←Kali3(a, c, s)
      q←Kali3(b, d, s)
      r←Kali3(a + b, c + d, s)
      return p*10^2s + (r - p - q)*10^s + q

   endif
```

Kompleksitas waktu algoritmanya:

$T(n)$ = waktu perkalian integer yang berukuran n/2 + waktu untuk perkalian dengan 10^s dan 10^{2s} dan waktu untuk penjumlahan

$$T(n) = \begin{cases} a & ,n = 1 \\ 3T(n/2) + cn & ,n > 1 \end{cases}$$

Bila relasi rekurens diselesaikan, diperoleh $T(n) = O(n^{\log 3}) = O(n^{1.59})$, lebih baik daripada kompleksitas waktu dua algoritma perkalian sebelumnya.