

ANALISIS SENSITIVITAS

MATAKULIAH RISET OPERASIONAL

Pertemuan Ke-11

Riani Lubis

Jurusan Teknik Informatika

Universitas Komputer Indonesia

Pengantar

- Merupakan analisis yang dilakukan untuk mengetahui akibat/pengaruh dari perubahan yang terjadi pada parameter-parameter PL terhadap solusi optimal yang telah dicapai.
- Melalui analisis sensitivitas dapat dievaluasi pengaruh perubahan-perubahan parameter dengan sedikit tambahan perhitungan berdasarkan tabel simplek optimum.

Terdapat 6 perubahan dalam analisis kepekaan yang berhubungan dengan sifat primal-dual, yaitu :

1. Perubahan koefisien fungsi tujuan untuk variabel non-basis. Sifat yang digunakan adalah sifat ke-2 pada primal-dual.
2. Perubahan koefisien fungsi tujuan pada variabel basis. Sifat yang digunakan adalah sifat ke-1 pada primal-dual.
3. Perubahan pada ruas kanan suatu pembatas. Sifat yang digunakan adalah sifat ke-3 pada primal-dual.

5. Perubahan kolom untuk suatu variabel non-basis. Sifat yang digunakan adalah sifat ke-4 pada primal-dual.
6. Penambahan suatu variabel/aktivitas baru. Digunakan kombinasi dari sifat ke-2 dan sifat ke-4 pada primal-dual.
7. Penambahan suatu pembatas baru. Kita melihat sampai sejauh mana perubahan yang terjadi dari sifat ke-1 sampai sifat ke-4 (masing-masing sifat diperiksa)

Perubahan-perubahan yang terjadi pada analisa kepekaan dihubungkan dengan sifat-sifat primal-dual adalah sebagai berikut :

1. Perubahan koefisien fungsi tujuan variabel non-basis, caranya gunakan harga-harga dual dari tabel optimal semula dan hitung kembali koefisien-koefisien persamaa-persamaan Z dari variabel non-basis yang bersangkutan. Sifat primal-dual yang digunakan adalah sifat ke-2.
2. Perubahan koefisien fungsi tujuan untuk variabel basis, caranya tentukan harga-harga variabel dual baru, kemudian gunakan harga-harga tersebut untuk menghitung persamaan-persamaan yang baru. Sifat primal-dual yang digunakan adalah sifat ke-1

3. Perubahan konstanta ruas kanan. Jika konstanta ruas kanan berharga non-negatif, maka variabel-variabel basis semula tidak berubah. Sedangkan jika ada yang berharga negatif sehingga variabel-variabel basis semula menjadi tidak fisibel maka selesaikan persoalan tersebut dengan dual-simplek. Sifat primal-dual yang digunakan adalah sifat ke-3.
4. Perubahan dalam kolom fungsi pembatas di bawah variabel basis pada iterasi yang bersangkutan. Memperhatikan 2 hal sebagai berikut :
 - a. Jika koefisien pembatas yang berubah adalah dari kegiatan non-basis, maka pengaruhnya terhadap solusi optimal seperti pada nomor (5).

- b. Jika koefisien pembatas yang berubah itu adalah dari kegiatan basis, maka matrik basis akan terpengaruh yang mungkin akan mempengaruhi semua jumlah pada tabel iterasi yang bersangkutan. Dengan demikian akan lebih baik memecahkan kembali persoalannya.

Sifat primal-dual yang digunakan adalah sifat ke-4.

- 5. Penambahan kegiatan/variabel baru. Caranya substitusikanlah simplek multiflier semula pada persamaan pembatas dual baru tersebut. Kemudian hitunglah selisih ruas kiri dan kanan. Jika selisihnya berharga positif (≥ 0), maka penambahan aktivitas baru tersebut tidak akan mempengaruhi solusi optimum yang telah dicapai.

Tetapi jika selisih tersebut berharga negatif, maka masukkanlah variabel baru ke dalam tabel simpleks dan sesuaikan dengan metoda simpleks biasa. Sifat yang digunakan merupakan kombinasi dari sifat ke-2 dan ke-4.

6. Penambahan pembatas baru pada suatu persoalan yang sudah mencapai solusi optimum akan mempengaruhi feasibility-nya. Jika pembatas baru tersebut bersifat aktif, artinya persamaannya tidak lagi terpenuhi oleh solusi optimal semula. Jika masih terpenuhi, maka pembatas baru dapat diabaikan dan solusi optimal tidak berubah. Sifat primal-dual yang berpengaruh pada analisa sensitivitas mungkin melibatkan satu atau ke-empat sifat yang bersangkutan.

Contoh

F. Tujuan : Maks $Z = 3X_1 + 5X_2$

F.Pembatas : $X_1 \leq 4$

$2X_2 \leq 12$

$3X_1 + 2X_2 \leq 18$

$X_1, X_2 \geq 0$

Solusi optimal dari persoalan di atas adalah sebagai berikut :

| BASIS | Z | X_1 | X_2 | S_1 | S_2 | S_3 | SOLUSI |
|-------|---|-------|-------|-------|--------|--------|--------|
| Z | 1 | 0 | 0 | 0 | $3/2$ | 1 | 36 |
| S_1 | 0 | 0 | 0 | 1 | $1/3$ | $-1/3$ | 2 |
| X_2 | 0 | 0 | 1 | 0 | $1/2$ | 0 | 6 |
| X_1 | 0 | 1 | 1 | 0 | $-1/3$ | $1/3$ | 2 |

- Jika fungsi tujuan berubah menjadi maksimasi $Z = 5X_1 + 7X_2$, berapa nilai optimalnya ?

Caranya :

Hitung harga-harga dual yang baru (SM), dimana $y_1 = S_1$, $y_2 = X_2$, dan $y_3 = X_1$ (Sifat ke-1 Primal Dual)

$$SM = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 11/6 & 5/3 \end{bmatrix}$$

Kemudian hitung kembali koefisien persamaan Z dengan mencari selisih ruas kiri dan kanan. Dari pembatas-pembatas dual ruas kanan harus sama dengan koefisien fungsi tujuan yang baru

Koefisien dual yang baru :

$$\mathbf{X}_1 \Rightarrow y_1 + 3y_3 - 5 = 0 + 3(5/3) - 5 = 0$$

$$\mathbf{X}_2 \Rightarrow 2y_2 + 2y_3 - 7 = 2(11/6) + 2(5/3) - 7 = 0$$

$$\mathbf{S}_1 \Rightarrow y_1 - 0 = 0 - 0 = 0$$

$$\mathbf{S}_2 \Rightarrow y_2 - 0 = 11/6 - 0 = 11/6$$

$$\mathbf{S}_3 \Rightarrow y_3 - 0 = 5/3 - 0 = 5/3$$

Karena koefisien fungsi tujuan baru ≥ 0 , maka tidak berpengaruh pada solusi optimal.

Yang berubah hanya nilai Z, menjadi $\Rightarrow Z = 5(2) + 7(6) = 52$

| BASIS | Z | X_1 | X_2 | S_1 | S_2 | S_3 | SOLUSI |
|-------|---|-------|-------|-------|-------|-------|--------|
| Z | 1 | 0 | 0 | 0 | 11/6 | 5/3 | 52 |

- Jika ruas sebelah kanan berubah dari 4 menjadi 8 dan dari 12 menjadi 6, seperti dibawah ini :

F. Tujuan : $Z = 3x_1 + 5x_2$

F.Pembatas : $X_1 \leq 8$

$$2X_2 \leq 6$$

$$3X_1 + 2X_2 \leq 18$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Berapakah solusi optimalnya ?

Caranya :

Hitung ruas kanan yang baru (Sifat ke-3 Primal-Dual)

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ X_2 \\ X_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Karena semua berharga non-negatif, maka variabel-variabel basis semula tidak berubah & yang berubah adalah :

$$X_1 = 4$$

$$X_2 = 3$$

$$Z = 3(4) + 5(3) = 27$$

Jika ada variabel ruas kanan yang berharga negatif (untuk contoh di atas $S_1 = 4$, $X_2 = 3$, dan $X_1 = -4$). Maka diselesaikan dengan metoda dual-simpleks.

- Jika terjadi penambahan aktivitas baru (misal : X_3) seperti yang didefinisikan di bawah ini :

Primal :

$$\text{F. Tujuan} \quad : \text{Maks } Z = 3X_1 + 5X_2 + 4X_3$$

$$\text{F.Pembatas} : X_1 + 2X_3 \leq 4$$

$$2X_2 + 3X_3 \leq 12$$

$$3X_1 + 2X_2 \leq 18$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

Bagimanakah solusi optimalnya ? Apakah terjadi perubahan solusi optimal atau tidak ? Buktikan !

Standar Primal :

$$\text{F. Tujuan} : \text{Maks } Z = 3X_1 + 5X_2 + 4X_3$$

$$\text{F.Pembatas} : X_1 + 2X_3 + S_1 = 4$$

$$2X_2 + 3X_3 + S_2 = 12$$

$$3X_1 + 2X_2 + S_3 = 18$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

Dual :

$$\text{F. Tujuan} : \text{Min } W = 4Y_1 + 12Y_2 + 18Y_3$$

$$\text{F.Pembatas} : Y_1 + 3Y_3 \geq 3$$

$$2Y_2 + 2Y_3 \geq 5$$

$$2Y_1 + 3Y_2 \geq 4$$

$$Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0$$

Standar Dual:

$$\text{F. Tujuan : Min } W = 4Y_1 + 12Y_2 + 18Y_3 + MR_1 + MR_2 + MR_3$$

$$\text{F.Pembatas : } Y_1 + 3Y_3 - S_1 + MR_1 = 3$$

$$2Y_2 + 2Y_3 - S_2 + MR_2 = 5$$

$$2Y_1 + 3Y_2 - S_3 + MR_3 = 4$$

$$Y_1, Y_2, Y_3, S_1, S_2, S_3, R_1, R_2, R_3 \geq 0$$

Tabel simpleks yang ditinjau berdasarkan tabel simpleks sebelumnya, adalah sbb :

| Basis | Z | X ₁ | X ₂ | X ₃ | S ₁ | S ₂ | S ₃ | Solusi |
|----------------|---|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|--------|
| Z | 1 | | | | | | | |
| S ₁ | 0 | | | | 1 | 1/3 | -1/3 | |
| X ₂ | 0 | | | | 0 | 1/2 | 0 | |
| X ₁ | 0 | | | | 0 | -1/3 | 1/3 | |