MODEL TRANSPORTASI

MATAKULIAH RISET OPERASIONAL

Pertemuan Ke-12 & 13

Riani Lubis

Jurusan Teknik Informatika

Universitas Komputer Indonesia

PENGANTAR

- Terdapat bermacam-macam *network* model.
- *Network* :
  - Suatu sistem saluran-saluran yang menghubungkan titik-titik yang berlainan.
  - Susunan titik (node) dan garis yang menghubungkan node-node.
- Contoh *network* : jaringan rel kereta api, sistem saluran pipa, jaringan jalan raya, jaringan penerbangan dll.
- Banyak masalah jaringan dapat dirumuskan sebagai masalah PL & solusinya diperoleh dengan menggunakan metode simpleks.
- Salah satu teknik lain yang lebih efisien daripada metode simpleks adalah metode transportasi, karena masalah transportasi adalah salah satu contoh dari model jaringan yang memiliki ciri-ciri yang sama.

Persoalan Transpotasi (1)

- Persoalan transportasi terpusat pada pemilihan rute dalam jaringan distribusi produk antara pusat industri dan distribusi gudang atau antara distribusi gudang regional dan distribusi pengeluaran lokal.

- Pada umumnya, masalah transportasi berhubungan dengan distribusi suatu produk tunggal dari beberapa sumber, dengan penawaran terbatas, menuju beberapa tujuan, dengan permintaan tertentu, pada biaya transpor minimum. Karena ada satu macam barang, suatu tempat tujuan dapat memenuhi permintaannya dari satu atau lebih sumber.

Persoalan Transpotasi (2)

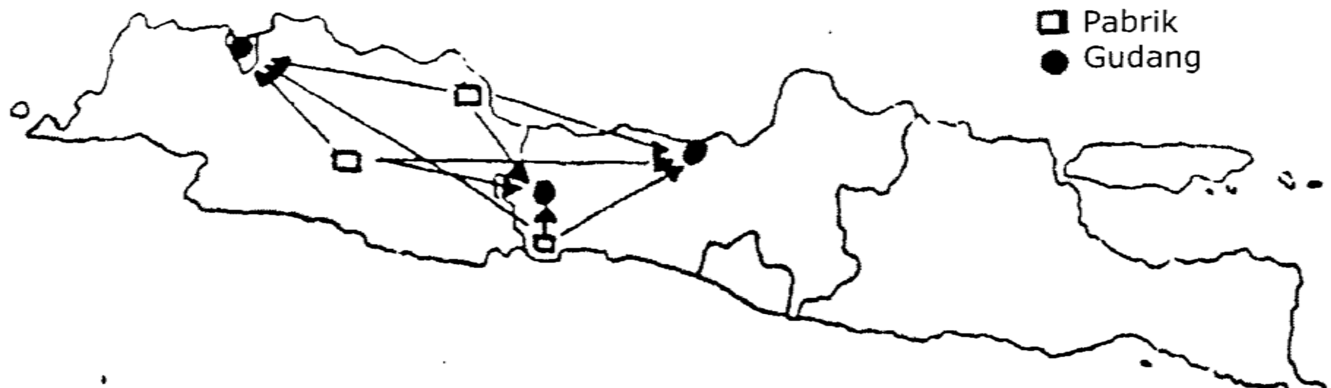
- Persoalan transportasi merupakan persoalan linier khusus yang disebut persoalan aliran network.

- Asumsi dasar model transportasi adalah bahwa biaya transpor pada suatu rute tertentu proporsional dengan banyaknya unit yang dikirimkan.

- Tujuan dari model transportasi adalah merencanakan pengiriman dari sumber-sumber ke tujuan sedemikian rupa untuk meminimumkan total biaya transportasi, dengan kendala-kendala :
  - Setiap permintaan tujuan terpenuhi
  - Sumber tidak mungkin mengirim komoditas lebih besar dari kapasitsnya.

Contoh

Misal suatu produk yang dihasilkan oleh 3 pabrik (sumber) harus didistribusikan ke 3 gudang (tujuan). Setiap pabrik memiliki kapasitas produksi tertentu, dan setiap gudang memiliki jumlah permintaan tertentu terhadap produk itu. Biaya transpor per unit dari masing-masing pabrik ke masing-masing gudang berbeda-beda. Masalah yang timbul adalah menentukan jumlah barang yang harus dikirim dari masing-masing pabrik ke masing-masing gudang dengan tujuan meminimumkan biaya transport.



- Suatu model transportasi dikatakan seimbang (*balanced* progam), jika total jumlah antara penawaran (*supply*) dan permintaan (demand) sama :

$$\sum_{i=1}^{m} S_i = \sum_{j=1}^{n} D_j$$

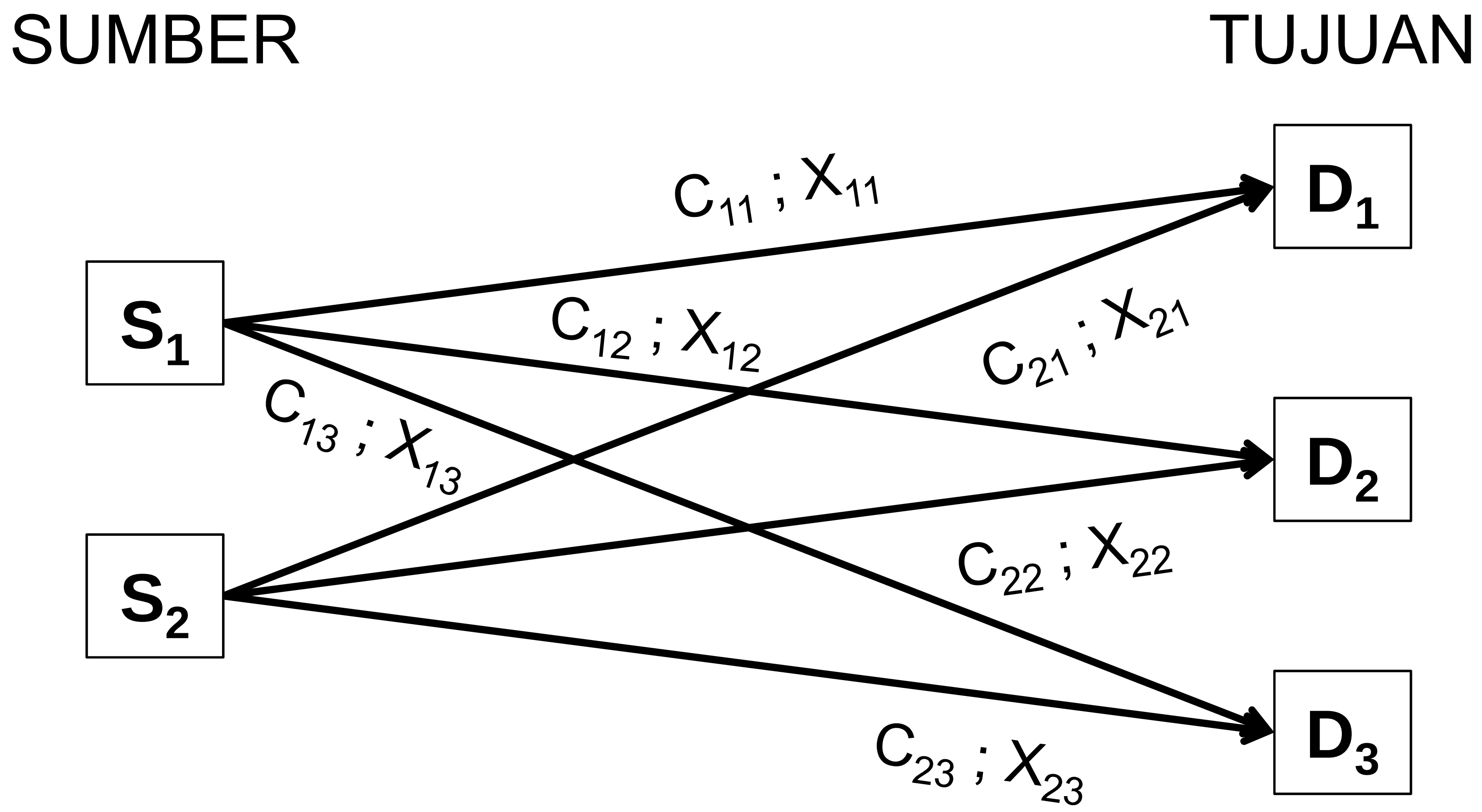
- Dan dikatakan tidak seimbang (*unbalanced* program), jika kapasitas sumber lebih besar dari kapasitas tujuan atau sebaliknya :

$$\sum_{i=1}^{m} S_i < \sum_{j=1}^{n} D_j \quad atau \quad \sum_{i=1}^{m} S_i > \sum_{j=1}^{n} D_j$$

Perumusan Model Transportasi

<table>
<tr><td>Fungsi Tujuan</td><td colspan="3">Minimumkan : $Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij}$</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Fungsi Pembatas</td><td>Balanced program</td><td colspan="2">Unbalanced program</td></tr>
<tr><td>$\sum_{i=1}^{m} S_i = \sum_{j=1}^{n} D_j$</td><td>$\sum_{i=1}^{m} S_i < \sum_{j=1}^{n} D_j$</td><td>$\sum_{i=1}^{m} S_i > \sum_{j=1}^{n} D_j$</td></tr>
<tr><td>$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = S_i$</td><td>$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = S_i$</td><td>$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} \leq S_i$</td></tr>
<tr><td>$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = D_j$</td><td>$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} \leq D_j$</td><td>$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = D_j$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Xij ≥ 0 untuk semua i dan j
i = 1, 2, ..., m
j = 1, 2, ..., n</td></tr>
</table>

Jika ada 2 buah sumber & 3 tujuan (m = 2, n = 3), maka :



$$\sum S = S_1 + S_2$$

$$\sum D = D_1 + D_2 + D_3$$

F. Tujuan :

Minimumkan

$$Z = C_{11}X_{11} + C_{12}X_{12} + X_{13}X_{13} + C_{21}X_{21} + C_{22}X_{22} + C_{23}X_{23}$$

F. Pembatas :

$$\left.\begin{array}{r} X_{11} + X_{12} + X_{13} = S_1 \\ X_{21} + X_{22} + X_{23} = S_2 \end{array}\right\} \textbf{Persamaan pembatas “Sumber”}$$

$$\left.\begin{array}{r} X_{11} + X_{21} = D_1 \\ X_{12} + X_{22} = D_2 \\ X_{13} + X_{23} = D_3 \end{array}\right\} \textbf{Persamaan pembatas “Tujuan”}$$

$$\sum_{i=1}^{m} S_i = \sum_{j=1}^{n} D_j$$

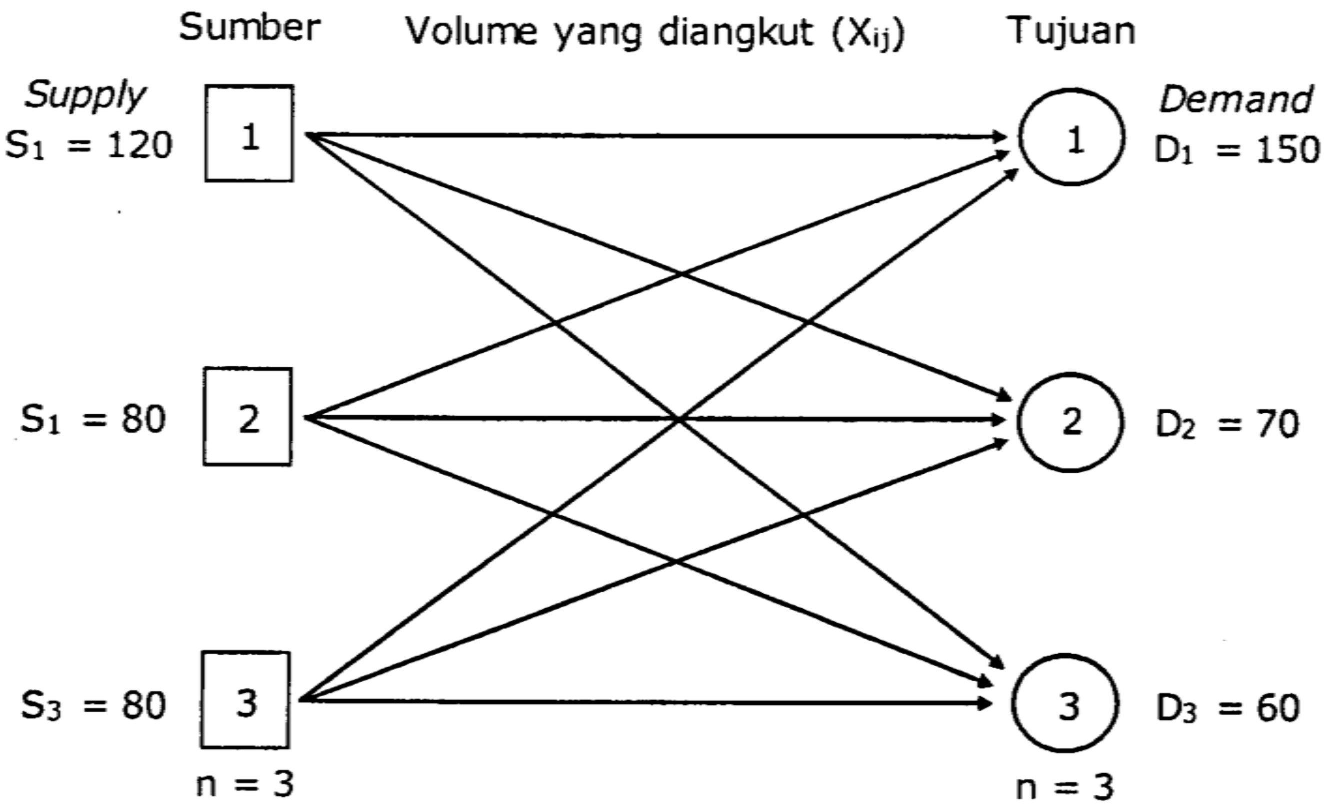
$$X_{ij} \geq 0$$

Ke		Tujuan						*Supply*
		1	2	. . .	j	. . .	n	
Sumber	1	X_{11} c_{11}	c_{12}	. . .	c_{11}	. . .	X_{1n} c_{1n}	S_1
	2	X_{21} c_{21}	X_{22} c_{22}	. . .	X_{21} c_{21}	. . .	X_{2n} c_{2n}	S_2
	⋮	⋮	⋮		⋮		⋮	⋮
	i	c_{i1}	c_{i2}	. . .	c_{ij}	. . .	c_{in}	S_1
	⋮	⋮	⋮		⋮		⋮	⋮
	m	X_{m1} c_{m1}	X_{m2} c_{m2}	. . .	X_{m1} c_{m1}	. . .	X_{mn} c_{mn}	S_n
Demand		D_1	D_2	. . .	D_j	. . .	Dn	$\sum S_i=\sum D_j$

Contoh :

Sebuah perusahaan Negara berkepentingan mengangkut pupuk dari tiga pabrik ke tiga pasar. Kapasitas supply ketiga pabrik, permintaan pada ketiga pasar dan biaya transpor per unit adalah sebagai berikut :

		PASAR			**PENAWARAN**
		1	**2**	**3**	
PABRIK	**1**	8	5	6	120
	2	15	10	12	80
	3	3	9	10	80
PERMINTAAN		150	70	60	280



Minimumkan $Z = 8X_{11} + 5X_{12} + 6X_{13} + 15X_{21} + 10X_{22} + 12X_{23} + 3X_{31} + 9X_{32} + 10X_{33}$

dengan syarat $X_{11} + X_{12} + X_{13} = 120$ (*supply* pabrik 1)

$X_{21} + X_{22} + X_{23} = 80$ (*supply* pabrik 2)

$X_{31} + X_{32} + X_{33} = 80$ (*supply* pabrik 3)

$X_{11} + X_{21} + X_{31} = 150$ (permintaan pasar 1)

$X_{12} + X_{22} + X_{32} = 70$ (permintaan pasar 2)

$X_{13} + X_{23} + X_{33} = 60$ (permintaan pasar 3)

semua $X_{ij} \geq 0$

Dari \ Ke	1	2	3	*Supply*
1	8	5	6	120
2	15	10	12	80
3	3	9	10	80
Demand	150	70	60	280

Langkah Pemecahan Masalah Transportasi :

1. Menentukan solusi fisibel awal dengan menggunakan ketiga metoda berikut :
   a. *North West Corner Rule* (NWCR) / Pokia-Pokaba
   b. *Least Cost Value* (LCV) / Ongkos Terkecil
   c. *Vogel Approximation Method* (VAM)

2. Pilih salah satu hasil solusi fisibel awal yang mempunyai nilai solusi fisibel terkecil.

3. Menentukan apakah metoda yang terpilih pada langkah 1 sudah optimum atau belum, dengan cara menentukan *entering* variabel. Jika ada perubahan, maka lanjutkan ke langkah 3. Tapi jika tidak ada, maka STOP (berhenti).

4. Menentukan *leaving* variabel dari langkah 3 dan menghitung kembali nilai solusi fisibel yang baru, kemudian kembali ke langkah 3.

Untuk langkah 3 dan langkah 4, dapat menggunakan salah satu metode di bawah ini :

a. *Stepping Stone Method*

b. *Multiplier Method*

Metode North West Corner Rule

- Menentukan distribusi dari pojok kiri atas ke pojok kanan bawah tanpa memperhatikan besarnya biaya.

- Prosedurnya :
  1. Mulai pada pojok kiri atas tabel dan alokasikan sebanyak mungkin pada X_{11} tanpa menyimpang dari kendala penawaran atau permintaan (artinya X_{11} ditetapkan sama dengan yang terkecil diantara nilai S_1 dan D_1 atau $\min(S_i, D_j)$

2. Ini akan menghabiskan penawaran pada sumber 1 dan atau permintaan pada tujuan 1. Akibatnya, tidak ada lagi barang yang dapat dialokasikan ke kolom atau baris yang telah dihabiskan dan kemudian baris atau kolom itu dihilangkan. Kemudian alokasikan sebanyak mungkin ke kotak di dekatnya pada baris atau pindahlah secara diagonal ke kotak berikutnya.

3. Lanjutkan dengan cara yang sama sampai semua penawaran telah dihabiskan dan keperluan permintaan telah dipenuhi.

Sbr \ Tuj	1	2	3	supply
1	8 **120**	5	6	120
2	15 **30**	10 **50**	12	80
3	3	9 **20**	10 **60**	80
Demand	150	70	60	280

Caranya :

- Sebanyak mungkin dialokasikan ke X_{11} sesuai dengan aturan bahwa X_{11} adalah yang minimum diantara [120,150], berarti X_{11} = 120. Ini menghabiskan penawaran pabrik 1 dan akibatnya, pada langkah selanjutnya baris 1 dihilangkan.
- Karena X_{11} = 120, maka permintaan pada tujuan 1 belum terpenuhi sebanyak 30. Kotak di dekatnya, X_{21} dialikasikan sebanyak mngkin sesuai dengan X_{21} = min [30,80] = 30. Ini menghilangkan kolom 1 pada langkah selanjutnya.
- Kemudian X_{22} = min [50,70] = 50, yang menghilangkan baris 2.
- X_{32} = min [20,80] = 20
- X_{33} = min [60,60] = 60

Solusi awal dengan 5 variabel basis & 4 variabel non-basis sbb :

Variabel Basis :

$X_{11} = 120$

$X_{21} = 30$

$X_{22} = 50$

$X_{32} = 20$

$X_{33} = 60$

Variabel Nonbasis :

$X_{12} = 0$

$X_{13} = 0$

$X_{23} = 0$

$X_{31} = 0$

Maka total biaya transpor adalah :

$$Z = 8X_{11} + 5X_{12} + 6X_{13} + 15X_{21} + 10X_{22} + 12X_{23} + 3X_{31} + 9X_{32} + 10X_{33}$$

$$= (8x120) + (15x30) + (10x50) + (9x20) + (10x60)$$

$$= 2690$$

Metode Least Cost Value

- Mencapai tujuan minimasi biaya dengan alokasi sistematik pada kotak-kotak sesuai dengan besarnya biaya transpor per unit.
- Prosedurnya :
  1. Pilih variabel X_{ij} (kotak) dengan biaya transpor (C_{ij}) terkecil dan alokasikan sebanyak mungkin. Untuk C_{ij} terkecil, X_{ij} = minimum [S_i, D_j]. Ini akan menghabiskan baris i atau kolom j.
  2. Dari kotak-kotak sisanya yang layak (yaitu yang tidak terisi atau tidak dihilangkan), pilih nilai C_{ij} terkecil dan alokasikan sebanyak mungkin.
  3. Lanjutkan proses ini sampai semua penawaran dan permintaan terpenuhi.

Sbr \ Tuj	1	2	3	supply
1	8	5 70	6 50	120
2	15 70	10	12 10	80
3	3 80	9	10	80
Demand	150	70	60	280

Caranya :

- Langkah pertama dalam metode LCV adalah menyarankan alokasi X_{31} karena $C_{31} = 3$ adalah kotak dengan biaya minimum. Jumlah yang dialokasikan adalah $X_{31} = \min[150,80] = 80$. Karena alokasi ini menghabiskan penawaran sumber 3 sehingga baris 3 dihapus, dan X_{32} maupun X_{33} tak layak lagi. Juga, permintaan sebanyak 150 pada tujuan 1 dikurangi 80 sehingga sekarang permintaannya tinggal 70.

- Alokasi kotak selanjutnya dipilih dari 6 kotak sisanya, Cij terkecil adalah $C_{12} = 5$ dan $X_{12} = \min[70,120] = 70$.

- Alokasi kotak sisanya dibuat dengan cara yang sama.
- Jika terdapat nilai C_{ij} terkecil yang sama (kembar), pilih diantara kotak itu secara sembarang. Karena ini hanya merupakan solusi awal yang tidak berpengaruh terhadap solusi optimum, kecuali mungkin memerlukan iterasi yang lebih banyak untuk mencapainya.

Solusi awal dengan 5 variabel basis & 4 variabel non-basis sbb :

Variabel Basis :

$X_{12} = 70$

$X_{13} = 50$

$X_{21} = 70$

$X_{23} = 10$

$X_{31} = 80$

Variabel Nonbasis :

$X_{11} = 0$

$X_{22} = 0$

$X_{32} = 0$

$X_{33} = 0$

Maka total biaya transpor adalah :

$$Z = 8X_{11} + 5X_{12} + 6X_{13} + 15X_{21} + 10X_{22} + 12X_{23} + 3X_{31} + 9X_{32} + 10X_{33}$$

$$= (5x70) + (6x50) + (15x70) + (12x10) + (3x80)$$

$$= 2060$$

Metode Aproksimasi Vogel

- VAM selalu memberikan suatu solusi awal yang lebih baik dibanding metode NWCR dan seringkali lebih baik daripada metode LCV.

- Pada beberapa kasus, solusi awal yang diperoleh memalui VAM akan menjadi optimum.

- VAM melakukan alokasi dalam suatu cara yang akan meminimumkan *penalty* (*opportunity cost*) dalam memilih kotak yang salah untuk suatu alokasi.

Prosedurnya

1. Hitung *opportunity cost* untuk setiap baris dan kolom. *Opportunity cost* untuk setiap baris i dihitung dengan mengurangkan nilai C_{ij} terkecil pada baris itu dari nilai C_{ij} satu tingkat lebih besar pada baris yang sama. *Opportunity cost* kolom diperoleh dengan cara yang serupa. Biaya-biaya ini adalah *penalty* karena tidak memilih kotak dengan biaya minimum.

2. Pilih baris atau kolom dengan *opportunity cost* terbesar (jika terdapat nilai kembar, pilih secara sembarang). Alokasikan sebanyak mungkin ke kotak dengan nilai C_{ij} minimum pada baris atau kolom yang dipilih. Untuk C_{ij} terkecil. X_{ij} = minimum $[S_i , D_j]$. Artinya *penalty* terbesar dihindari.

3. Sesuaikan penawaran dan permintaan untuk menunjukkan alokasi yang sudah dilakukan. Hilangkan semua baris dan kolom dimana penawaran dan permintaan telah dihabiskan.

4. Jika semua penawaran dan permintaan belum dipenuhi, kembali ke langkah 1 dan hitung lahi *opportunity cost* yang baru. Jika semua penawaran dan permintaan, solusi awal telah diperoleh.

Sbr \ Tuj	1	2	3	supply
1	8	5	6	120
2	15	10	12	80
3	3 **80**	9	10	80
Demand	150	70	60	280

Penalty Cost (Baris)

6 – 5 = 1

12 – 10 = 2

9 – 3 = 6

Penalty terbesar

Penalty Cost (Kolom) 8 – 3 = 5 9 – 5 = 4 10 – 6 = 4

Selisih Cost terkecil

Sbr \ Tuj	1	2	3	supply
1	8 **70**	5	6 **50**	120
2	15	10 **70**	12 **10**	80
3	3 **80**	9	10	80
Demand	150	70	60	280

Penalty Cost (Baris)

I	II	III
1	1	1
2	2	2
6	–	–

Penalty Cost (Kolom)		1	2	3
	I	5	4	4
	II	7	5	6
	III	–	5	6

Caranya :

- Langkah pertama dalam metode VAM adalah menghitung *opportunity cost (penalty cost)* untuk iterasi ke-1 yang dilakukan pada setiap baris dan kolom. Setelah itu dipilih *opportunity cost* yang terbesar.

- Karena sumber 3 memiliki nilai *opportunity cost* terbesar maka disarankan alokasi X_{31} karena C_{31} = 3 adalah kotak dengan biaya minimum jika dibandingkan dengan C_{32} dan C_{33}. Jumlah yang dialokasikan adalah X_{31} = min [150,80] = 80. Karena alokasi ini menghabiskan penawaran sumber 3 sehingga baris 3 dihapus, dan X_{32} maupun X_{33} tak diperhitungkan lagi pada iterasi berikutnya. Juga, permintaan sebanyak 150 pada tujuan 1 dikurangi 80 sehingga sekarang permintaannya tinggal 70.

- Pada iterasi ke-2, lakukan perhitungan *opportunity cost* dengan mengabaikan kotak yang telah terisi (X_{31}) ataupun yang tidak akan diperhitungkan lagi (X_{32}, X_{33}). Karena pada iterasi ke-2, kolom tujuan 1 yang memiliki *opportunity cost* terbesar maka disarankan mengalokasikan ke kotak X_{11} karena $C_{31} = 8$ dengan alokasi sebesar X_{31} = min [70,120] = 70.

- Lakukan iterasi tersebut berulang-ulang sampai permintaan terpenuhi semua.

Solusi awal dengan 5 variabel basis & 4 variabel non-basis sbb :

Variabel Basis :

$X_{11} = 70$

$X_{13} = 50$

$X_{22} = 70$

$X_{23} = 10$

$X_{31} = 80$

Variabel Nonbasis :

$X_{12} = 0$

$X_{21} = 0$

$X_{32} = 0$

$X_{33} = 0$

Maka total biaya transpor adalah :

$$Z = 8X_{11} + 5X_{12} + 6X_{13} + 15X_{21} + 10X_{22} + 12X_{23} + 3X_{31} + 9X_{32} + 10X_{33}$$

$$= (8x70) + (6x50) + (10x70) + (12x10) + (3x80)$$

$$= 1920$$

- Dari pencarian solusi awal dengan ketiga metoda di atas, diperoleh kesimpulan bahwa biaya awal terkecil adalah 1920 yang diperoleh dari hasil pencarian dengan metoda VAM.
- Tetapi apakah solusi ini merupakan solusi optimum atau bukan, belum diketahui. Karena harus dilanjutkan ke langkah 2 untuk mencari solusi optimum.
- Setelah solusi layak dasar awal diperoleh, kemudian dilakukan perbaikan untuk mencapai solusi optimum.
- Pencarian solusi optimum dapat dilakukan dengan menggunakan metoda ***stepping stone*** atau metoda ***multiplier***.

Metode Stepping Stone

- Setelah solusi layak dasar awal diperoleh dari masalah transportasi, langkah berikutnya adalah menekan ke bawah biaya transpor dengan memasukkan variabel non-basis (yaitu alokasi barang ke kotak kosong) ke dalam solusi.
- Proses evaluasi variabel non-basis yang memungkinkan terjadinya perbaikan solusi dan kemudian mengalokasikan kembali dinamakan metode stepping-stone.
- Variabel non-basis = kolom-kolom yang tidak mempunyai nilai
- Variabel basis = kolom-kolom yang mempunyai nilai

Beberapa hal penting dalam penyusunan jalur stepping stone :

1. Arah yang diambil, baik searah maupun berlawanan arah dengan jarum jam adalah tidak penting dalam membuat jalur tertutup.
2. Hanya ada satu jalur tertutup untuk setiap kotak kosong.
3. Jalur harus hanya mengikuti kotak terisi (dimana terjadi perubahan arah), kecuali pada kotak kosong yang sedang dievaluasi.
4. Namun, baik kotak terisi maupun kosong dapat dilewati dalam penyusunan jalur tertutup.
5. Suatu jalur dapat melintasi dirinya.
6. Sebuah penambahan dan sebuah pengurangan yang sama besar harus kelihatan pada setiap baris kolom pada jalur itu.

Karena dari langkah 1 diperoleh solusi awal dari metoda VAM. Maka dari tabel VAM dilakukan perhitungan solusi optimum.

- **Loop 1 :**

Sbr \ Tuj	1	2	3	supply
1	8 70	5 +	6 − 50	120
2	15	10 − 70	12 + 10	80
3	3 80	9	10	80
Demand	150	70	60	280

Jalur : X_{12} : $X_{12} \Rightarrow X_{13} \Rightarrow X_{23} \Rightarrow X_{22} \Rightarrow X_{12}$

ΔC : $\Delta C_{12} = 5 - 6 + 12 - 10 = +1$

- **Loop 2 :**

Sbr \ Tuj	1	2	3	supply
1	8 − 70	5	6 + 50	120
2	15 +	10 70	12 10 −	80
3	3 80	9	10	80
Demand	150	70	60	280

Jalur : X_{21} : $X_{21} \Rightarrow X_{11} \Rightarrow X_{13} \Rightarrow X_{23} \Rightarrow X_{21}$

ΔC : $\Delta C_{21} = 15 - 8 + 6 - 12 = +1$

• **Loop 3 :**

Sbr \ Tuj	1	2	3	supply
1	8 **70**	5	6 **50**	120
2	15	10 **70**	12 **10**	80
3	3 **80**	9	10	80
Demand	150	70	60	280

Jalur : X_{32} **:** $X_{32} \Rightarrow X_{31} \Rightarrow X_{11} \Rightarrow X_{13} \Rightarrow X_{23} \Rightarrow X_{22} \Rightarrow X_{32}$

ΔC **:** $\Delta C_{32} = 9 - 3 + 8 - 6 + 12 - 10 = +10$

- **Loop 4 :**

Sbr \ Tuj	1	2	3	supply
1	(8) + 70	(5)	(6) − 50	120
2	(15)	(10) 70	(12) 10	80
3	(3) 80 −	(9)	(10) +	80
Demand	150	70	60	280

Jalur : X_{33} : $X_{33} \Rightarrow X_{31} \Rightarrow X_{11} \Rightarrow X_{13} \Rightarrow X_{33}$

ΔC : $\Delta C_{33} = 10 - 3 + 8 - 6 = +9$

- Jalur stepping stone untuk semua kotak kosong (Variabel Non Basis) :

  $X_{12} \Rightarrow X_{12} \rightarrow X_{13} \rightarrow X_{23} \rightarrow X_{22} \rightarrow X_{12}$

  $X_{21} \Rightarrow X_{21} \rightarrow X_{11} \rightarrow X_{13} \rightarrow X_{23} \rightarrow X_{21}$

  $X_{32} \Rightarrow X_{32} \rightarrow X_{31} \rightarrow X_{11} \rightarrow X_{13} \rightarrow X_{23} \rightarrow X_{22} \rightarrow X_{32}$

  $X_{33} \Rightarrow X_{33} \rightarrow X_{31} \rightarrow X_{11} \rightarrow X_{13} \rightarrow X_{33}$

- Perubahan biaya yang dihasilkan dari masing-masing jalur :

  $\Delta C_{12} = 5 - 6 + 12 - 10 = +1$

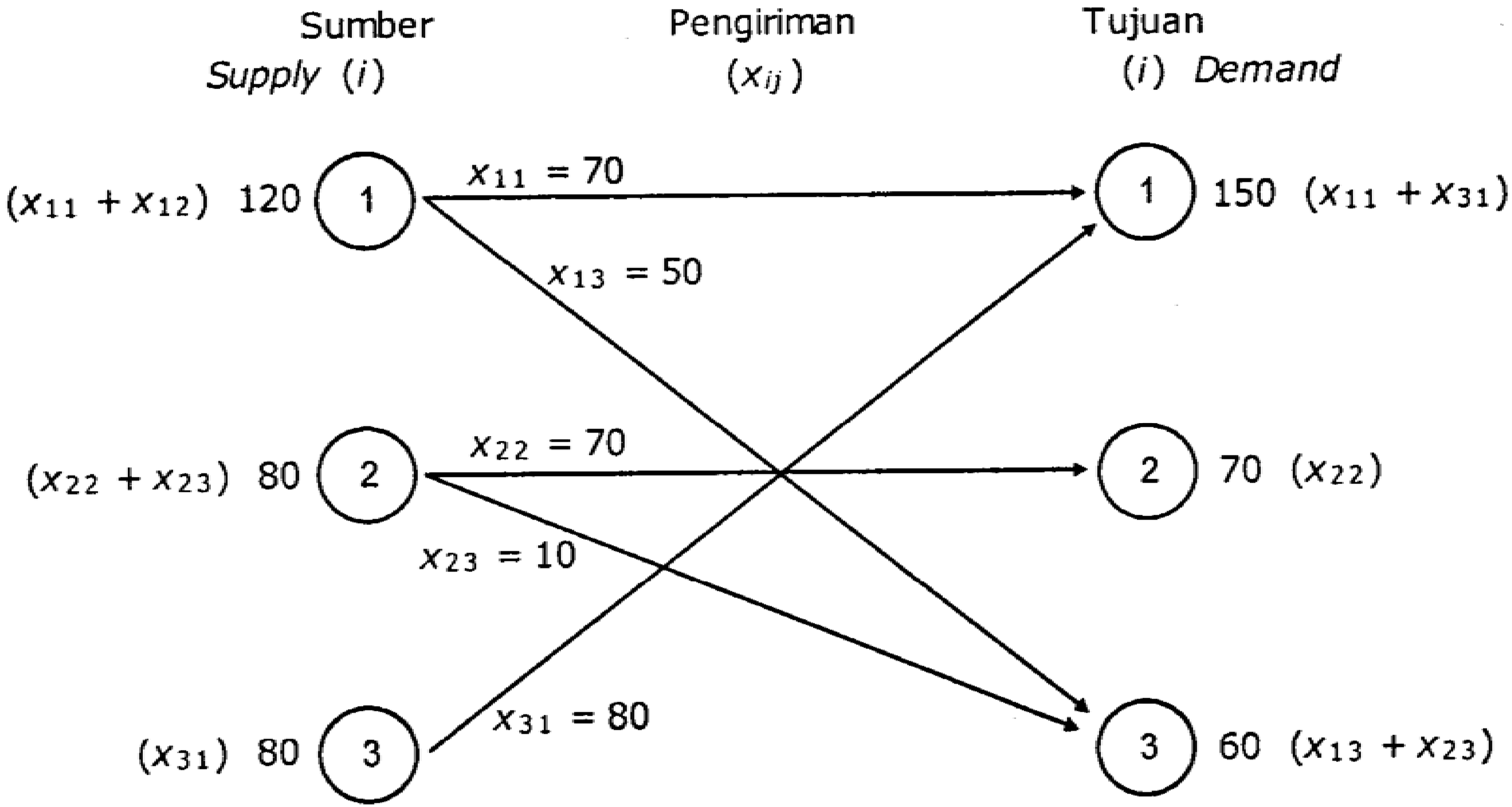
  $\Delta C_{21} = 15 - 8 + 6 - 12 = +1$

  $\Delta C_{32} = 9 - 3 + 8 - 6 + 12 - 10 = +10$

  $\Delta C_{33} = 10 - 3 + 8 - 6 = +9$

  Karena tidak ada calon entering variabel (semua kotak kosong memiliki C_{ij} positif), berarti solusi sudah optimum.

- Solusinya :



Sumber
Supply (i)
Pengiriman
(x_{ij})
Tujuan
(i) Demand
($x_{11} + x_{12}$) 120
1
x_{11} = 70
x_{13} = 50
1
150 ($x_{11} + x_{31}$)
($x_{22} + x_{23}$) 80
2
x_{22} = 70
x_{23} = 10
2
70 (x_{22})
(x_{31}) 80
3
x_{31} = 80
3
60 ($x_{13} + x_{23}$)

- Misal solusi awal yang diperoleh dari metode NWCR, maka evaluasi masing-masing variabel non basis dengan metoda *stepping stone* adalah sbb :

Sbr \ Tuj	1	2	3	supply
1	8 **120**	5	6	120
2	15 **30**	10 **50**	12	80
3	3	9 **20**	10 **60**	80
Demand	150	70	60	280

Loop 1 :

Sbr \ Tuj	1	2	3	supply
1	− 8 **120**	+ 5	6	120
2	+ 15 **30**	10 **50** −	12	80
3	3	9 **20**	10 **60**	80
Demand	150	70	60	280

Loop 2 :

Tuj / Sbr	1	2	3	supply
1	− 8 120	5	+ 6	120
2	+ 15 30	− 10 50	12	80
3	3	9 20 +	10 60 −	80
Demand	150	70	60	280

Loop 3 :

Sbr \ Tuj	1	2	3	supply
1	8 120	5	6	120
2	15 30	10 − 50	12 +	80
3	3	9 + 20	10 60 −	80
Demand	150	70	60	280

Loop 4 :

Tuj / Sbr	1	2	3	supply
1	8 120	5	6	120
2	15 − 30	10 + 50	12	80
3	3 +	9 20 −	10 60	80
Demand	150	70	60	280

- Jalur stepping stone untuk semua kotak kosong (variabel non-basis):

  $X_{12} \Rightarrow X_{12} \rightarrow X_{22} \rightarrow X_{21} \rightarrow X_{11} \rightarrow X_{12}$

  $X_{13} \Rightarrow X_{13} \rightarrow X_{33} \rightarrow X_{32} \rightarrow X_{22} \rightarrow X_{21} \rightarrow X_{11} \rightarrow X_{13}$

  $X_{23} \Rightarrow X_{23} \rightarrow X_{33} \rightarrow X_{32} \rightarrow X_{22} \rightarrow X_{23}$

  $X_{31} \Rightarrow X_{31} \rightarrow X_{21} \rightarrow X_{22} \rightarrow X_{32} \rightarrow X_{31}$

- Perubahan biaya yang dihasilkan dari masing-masing jalur :

  $\Delta\ C_{12} = 5 - 10 + 15 - 8 = +2$

  $\Delta\ C_{21} = 6 - 10 + 9 - 10 + 15 - 8 = +2$

  $\Delta\ C_{32} = 12 - 10 + 9 - 10 = +1$

  $\Delta\ C_{31} = 3 - 15 + 10 - 9 = -11$

- Hanya nilai X_{31} yang memiliki perubahan biaya negatif (C_{31} = – 11), sehingga X_{31} adalah variabel nonbasis dengan nilai C_{ij} negatif, yang jika dimasukkan ke solusi yang ada akan menurunkan biaya.
- Jika terdapat dua atau lebih variabel nonbasis dengan C_{ij} negatif, maka dipilih satu yang memiliki perubahan menurunkan biaya yang terbesar.
- Jika terdapat nilai kembar, piling salah satu secara sembarang.
- Karena telah menentukan X_{31} adalah entering variabel, kemudian harus ditetapkan berapa yang akan dialokasikan ke kotak X_{31} (tentunya ingin dialokasikan sebanyak mungkin ke X_{31}).
- Untuk menjaga kendala penawaran dan permintaan, alokasi harus dibuat sesuai dengan jalur stepping stone yang telah ditentukan untuk X_{31}

Iterasi 1 :

Karena pada Loop 3, cost yang paling kecil adalah **C_{32} = 20**, maka nilai cost tersebut dipilih sebagai koefisien yang mengurangi dan menambah setiap cost pada jalur Loop 3 sesuai tanda yang telah ditentukan sebelumnya.

Sbr \ Tuj	1	2	3	supply
1	8 **120**	5	6	120
2	15 **10**	10 **70**	12	80
3	3 **20**	9	10 **60**	80
Demand	150	70	60	280

- Proses stepping stone yang sama untuk mengevaluasi kotak kosong harus diulang, untuk menentukan apakah solusi telah optimum atau apakah ada calon entering variabel

Iterasi 2 :

Sbr \ Tuj	1	2	3	supply
1	120 [8]	[5]	[6]	120
2	[15]	70 [10]	10 [12]	80
3	30 [3]	[9]	50 [10]	80
Demand	150	70	60	280

Iterasi 3 :

Sbr \ Tuj	1	2	3	supply
1	8 70	5	6 50	120
2	15	10 70	12 10	80
3	3 80	9	10	80
Demand	150	70	60	280

Solusi ? Sama dengan hasil metode VAM ?

Metode Multiplier (1)

- Metode ini adalah variasi metode *stepping stone* yang didasari pada perumusan dual.

- Pada metode ini tidak perlu menentukan semua jalur tertutup variabel nonbasis. Sebagai gantinya, nilai-nilai C_{ij} ditentukan secara serentak dan hanya jalur tertutup untuk entering variabel yang diidentifikasi

- Langkahnya :
  1. Tentukan nilai-nilai U_i untuk setiap baris dan nilai-nilai V_j untuk setiap kolom dengan menggunakan hubungan $\mathbf{C_{ij} = U_i + V_j}$ untuk semua basis dan tetapkan nilai nol untuk U_1.

Metode Multiplier (2)

2. Hitung perubahan biaya, C_{ij} untuk setiap variabel nonbasis dengan menggunakan rumus

   $\Delta \mathbf{C_{ij} = C_{ij} - U_i - V_j}$.

2. Jika terdapat nilai **C_{ij} negatif**, solusi **belum optimal**. Pilih variabel X_{ij} dengan nilai **C_{ij} negatif terbesar** sebagai **entering variabel**.

3. Alokasikan barang ke entering variabel, X_{ij} sesuai proses *stepping stone*. Kembali ke langkah 1.

- Misal solusi awal yang diperoleh dari metode NWCR

$V_1 = 8$ $V_2 = 3$ $V_3 = 4$

	Sbr \ Tuj	1	2	3	supply
$U_1 = 0$	1	8 **120**	5	6	120
$U_2 = 7$	2	15 **30**	10 **50**	12	80
$U_3 = 6$	3	3	9 **20**	10 **60**	80
	Demand	150	70	60	280

- Biaya-biaya pada variabel Basis (kotak isi) :

  $C_{11} = 8$ $C_{21} = 15$

  $C_{22} = 10$ $C_{32} = 9$ $C_{33} = 10$

- Diasumsikan : $U_1 = 0$
- Nilai-nilai U_i dan V_j :

$X_{11} \Rightarrow U_1 + V_1 = C_{11}$

$0 + V_1 = 8$

$\mathbf{V_1 = 8}$

$X_{21} \Rightarrow U_2 + V_1 = C_{21}$

$\mathbf{U_2 = 7}$

$X_{22} \Rightarrow U_2 + V_2 = C_{22}$

$\mathbf{V_2 = 3}$

$X_{32} \Rightarrow U_3 + V_2 = C_{32}$

$\mathbf{U_3 = 6}$

$X_{33} \Rightarrow U_3 + V_3 = C_{33}$

$\mathbf{V_3 = 4}$

- Perubahan biaya untuk semua variabel non-basis (kotak kosong) : $\boldsymbol{\Delta C_{ij} = C_{ij} - U_i - V_j}$

  $\Delta C_{12} = C_{12} - U_1 - V_2 = 5 - 0 - 3 = 2$

  $\Delta C_{13} = C_{13} - U_1 - V_3 = 6 - 0 - 4 = 2$

  $\Delta C_{23} = C_{23} - U_2 - V_3 = 12 - 7 - 4 = 1$

  $\Delta C_{31} = C_{31} - U_3 - V_1 = 3 - 6 - 8 = -11$

- C_{31} negatif, menunjukkan bahwa solusi yang ada belum optimal dan X_{31} adalah *entering variabel*.

Buat loop yang dimulai dari X_{31}

Sbr \ Tuj	1	2	3	supply
1	8 **120**	5	6	120
2	15 – **30**	10 + **50**	12	80
3	3 +	9 **20** –	10 **60**	80
Demand	150	70	60	280

Iterasi 1 :

Jumlah yang dialokasikan ke X_{31} harus ditentukan sesuai dengan prosedur *stepping stone*, sehingga 20 unit dialokasikan ke X_{31}.

Sbr \ Tuj	1	2	3	supply
1	[8] **120**	[5]	[6]	120
2	[15] **10**	[10] **70**	[12]	80
3	[3] **20**	[9]	[10] **60**	80
Demand	150	70	60	280

- Setelah mendapatkan solusi pada iterasi 1, maka nilai-nilai U_i, V_j dan C_{ij} pada tabel iterasi 1 harus dihitung lagi untuk uji optimalitas dan menentukan *entering variabel*.

- Lakukan hal tersebut di atas berulang-ulang hingga diperoleh kondisi optimum.

- Solusi optimum untuk contoh di atas ini memerlukan iterasi yang sama dengan metode *stepping stone* dan alokasi yang sama akan terjadi pada setiap iterasi.

Iterasi 1 :

		$V_1 = 8$	$V_2 = 3$	$V_3 = 15$	
	Sbr \ Tuj	1	2	3	supply
$U_1 = 0$	1	[8] **120**	[5]	[6]	120
$U_2 = 7$	2	[15] **10**	[10] **70**	[12]	80
$U_3 = -5$	3	[3] **20**	[9]	[10] **60**	80
	Demand	150	70	60	280

- Perubahan biaya untuk semua variabel non-basis (kotak kosong) :

  $\Delta C_{12} = C_{12} - U_1 - V_2 = 5 - 0 - 3 = 2$

  $\Delta C_{13} = C_{13} - U_1 - V_3 = 6 - 0 - 15 = -9$

  $\Delta C_{23} = C_{23} - U_2 - V_3 = 12 - 7 - 15 = -10$

  $\Delta C_{32} = C_{32} - U_3 - V_2 = 9 - (-5) - 3 = 11$

- C_{13} dan C_{23} negatif, menunjukkan bahwa solusi yang ada belum optimal dan X_{23} dipilih sebagai *entering variabel* karena memiliki ΔC_{23} paling kecil (paling negatif) .

Iterasi 2 : $V_1 = 8$ $V_2 = 13$ $V_3 = 15$

	Tuj / Sbr	1	2	3	supply
$U_1 = 0$	1	120 [8]	[5]	[6]	120
$U_2 = -3$	2	[15]	70 [10]	10 [12]	80
$U_3 = -5$	3	30 [3]	[9]	50 [10]	80
	Demand	150	70	60	280

- Perubahan biaya untuk semua variabel non-basis (kotak kosong) :

  $\Delta C_{12} = C_{12} - U_1 - V_2 = 5 - 0 - 13 = -8$

  $\Delta C_{13} = C_{13} - U_1 - V_3 = 6 - 0 - 15 = -9$

  $\Delta C_{21} = C_{21} - U_2 - V_1 = 15 - (-3) - 8 = 10$

  $\Delta C_{32} = C_{32} - U_3 - V_2 = 9 - (-5) - 13 = 1$

- C_{12} dan C_{13} negatif, menunjukkan bahwa solusi yang ada belum optimal dan X_{13} dipilih sebagai *entering variabel* karena memiliki ΔC_{13} paling kecil (paling negatif) .

Iterasi 3 : $V_1 = 8$ $V_2 = 4$ $V_3 = 6$

	Tuj / Sbr	1	2	3	supply
$U_1 = 0$	1	70 [8]	[5]	50 [6]	120
$U_2 = 6$	2	[15]	70 [10]	10 [12]	80
$U_3 = -5$	3	80 [3]	[9]	[10]	80
	Demand	150	70	60	280

- Perubahan biaya untuk semua variabel non-basis (kotak kosong) :

  $\Delta C_{12} = C_{12} - U_1 - V_2 = 5 - 0 - 4 = 1$

  $\Delta C_{21} = C_{21} - U_2 - V_1 = 15 - 6 - 8 = 1$

  $\Delta C_{32} = C_{32} - U_3 - V_2 = 9 - (-5) - 4 = 10$

  $\Delta C_{33} = C_{33} - U_3 - V_3 = 10 - (-5) - 6 = 9$

- Seluruh ΔC_{ij} di atas sudah menunjukkan nilai positif semuanya, sehingga dapat disimpulkan bahwa tabel transportasi iterasi 3 di atas telah optimum.

- Apakah solusi optimumnya sama dengan hasil Stepping Stone ? Apakah sama juga dengan metode VAM ?