VARIABEL ACAK & FUNGSI DISTRIBUSI

Mata Kuliah Pemodelan & Simulasi

Riani Lubis

Program Studi Teknik Informatika

Universitas Komputer Indonesia

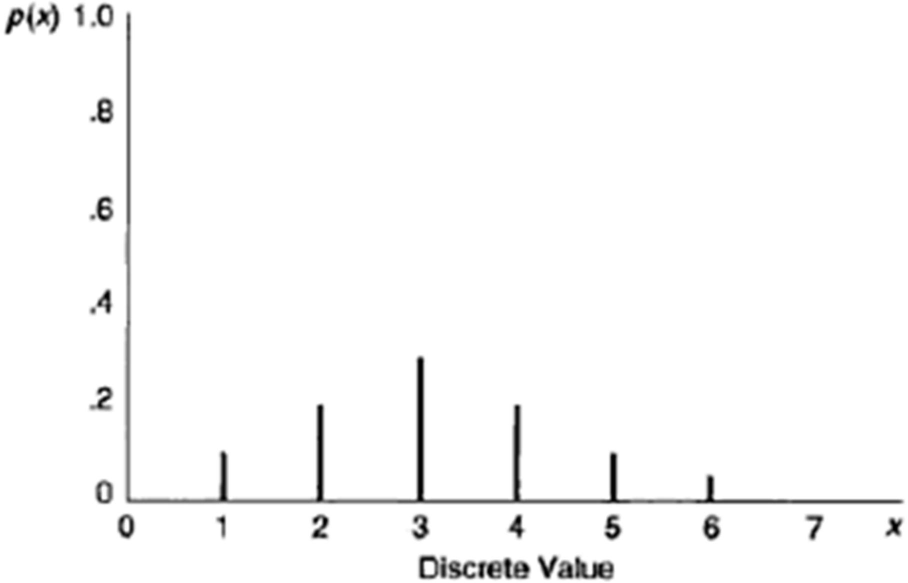
Pokok Bahasan

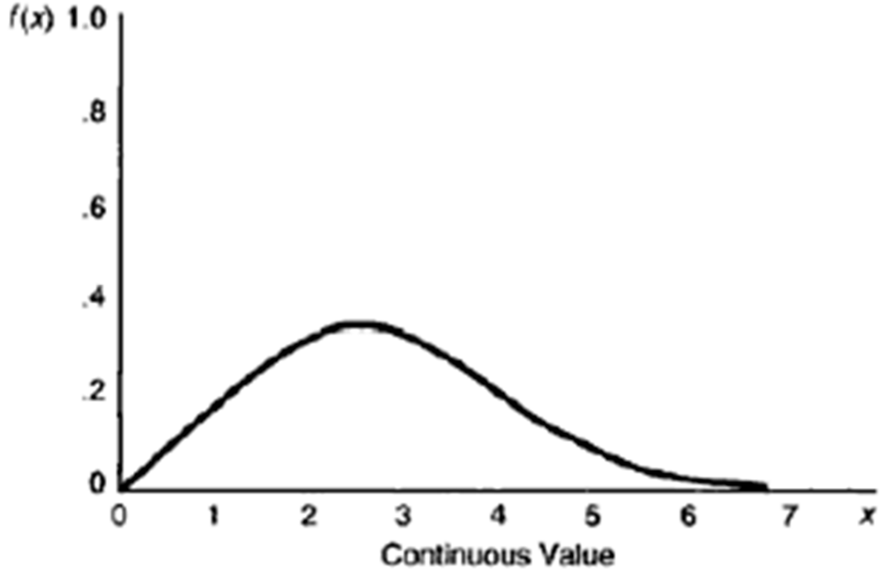
- Variabel Acak
- Pola Distribusi Masukan
- Pendugaan Pola Distribusi
- Uji Distribusi
- Beberapa Fungsi Distribusi
- Analisis Hasil Simulasi

Variabel Acak (1)

<table>
<tr><th colspan="2">Variabel Acak
(Deskripsi Numerik dari hasil ekperimen)</th></tr>
<tr><td>Variabel Acak Diskrit
• Hanya memiliki nilai tertentu
• Bilangan cacah
• Hasil perhitungan</td><td>Variabel Acak Kontinu
• Memiliki nilai pada suatu interval tertentu
• Bilangan real
• Hasil pengukuran</td></tr>
</table>

Variabel Acak (2)





Contoh

Variabel Acak Diskrit	Variabel Acak Kontinu
Jumlah kemunculan sisi muka pada pelemparan koin	Usia penduduk suatu daerah
Jumlah anak dalam sebuah keluarga	Panjang beberpa helai kain
Jumlah pembeli yang memasuki sebuah toko	Jarak kota A ke kota B
Banyaknya produk yang rusak	Waktu produksi per unit

Pola Distribusi Masukan

- Hampir semua sistem nyata memiliki satu atau lebih unsur keacakan.
- Aktualisasi keacakan dalam simulasi sering dinyatakan sebagai fungsi distribusi probabilitas.
- Kesalahan atau kekurangtepatan dalam memilih fungsi distribusi probabilitas untuk menggambarkan keacakan sistem nyata akan berakibat fatal pada hasil simulasi, sehingga memungkinkan akan diperoleh kesimpulan yang bias.
- Untuk mengetahui pola fungsi distribusi probabilitas atas variabel acak adalah dengan mengumpulkan data historis variabel tersebut.

Beberapa Pendekatan

Menggunakan langsung data historis variabel acak

Pendekatan empiris → metode heuristik diperoleh fungsi distribusi empirisnya

Pendekatan teoritis → teknik inferensif baku diperoleh fungsi distribusi teoritis

POLA DISTRIBUSI

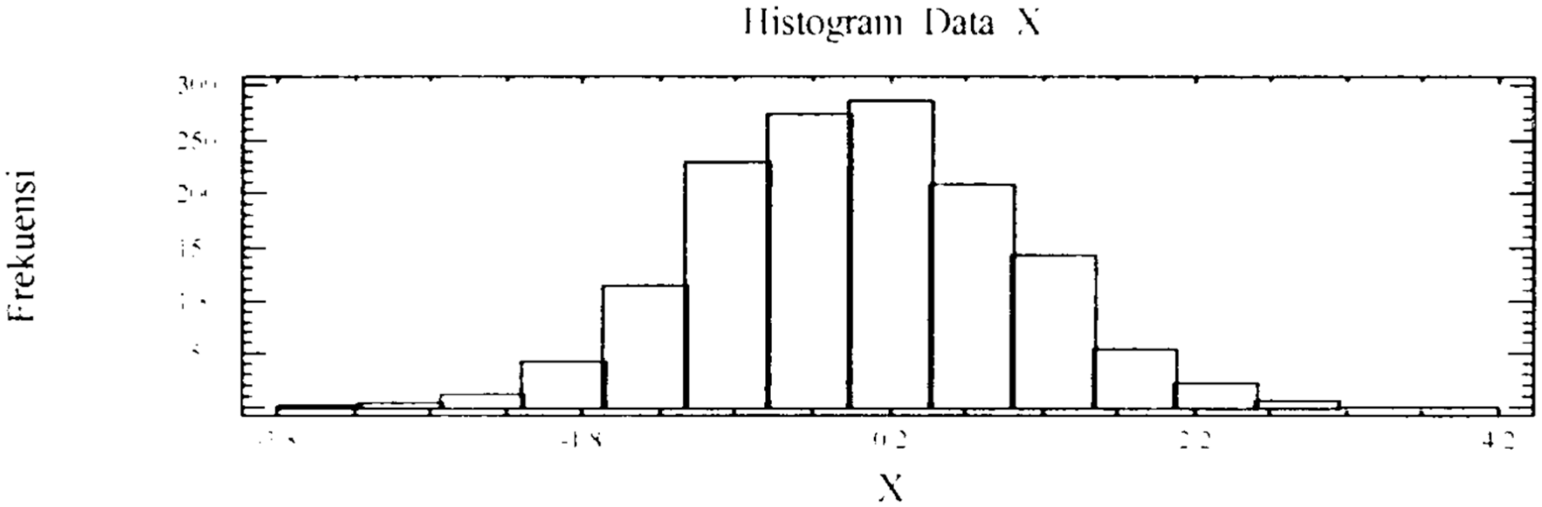
Cara Pendugaan

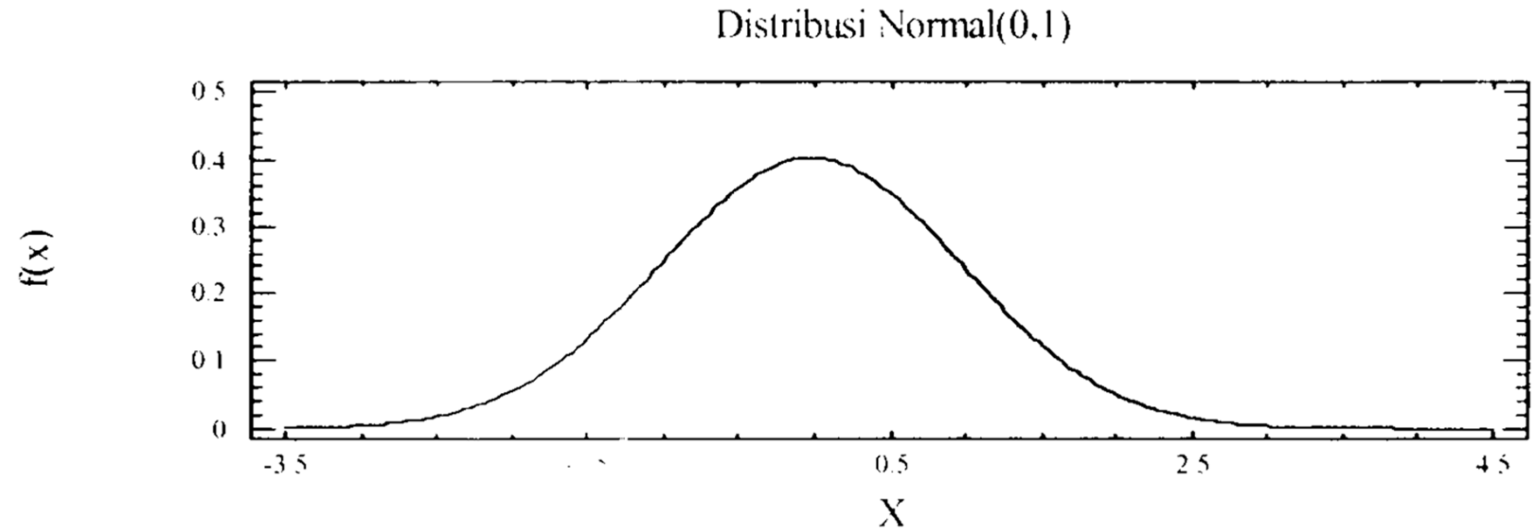
Ringkasan Statistik

- Nilai-nilai pemusatan (Mean & Median)
- Koefisien varian
- Skewness

Histogram & Grafik Garis

Membandingkan Histogram dengan Pola Baku





Contoh

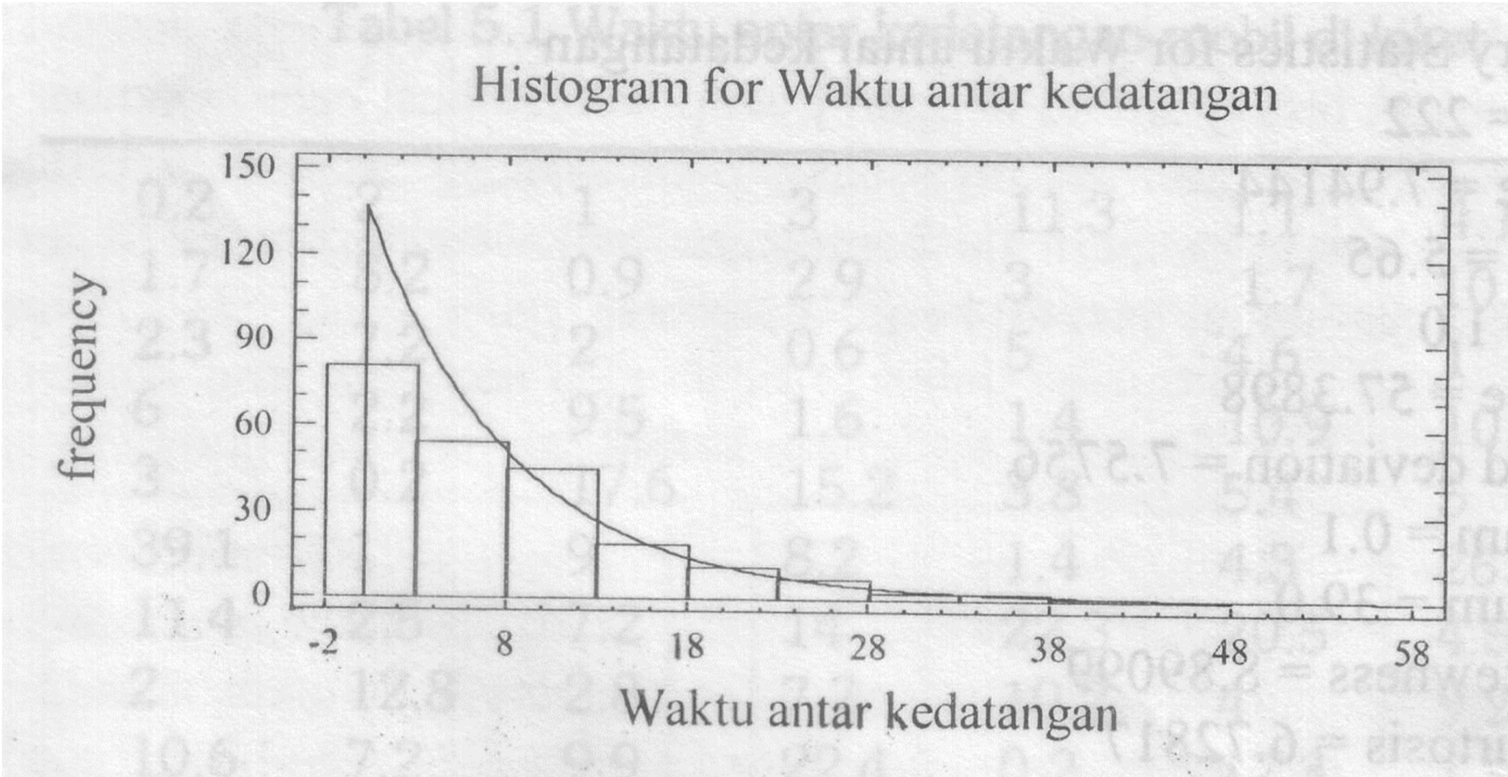
Data waktu antar kedatangan mobil yang masuk ke loket pengambilan karcis masuk jalan tol (dalam satuan detik). Pengukuran dilakukan dalam waktu 90 menit.

7,8	1	10,2	19,7	8,2	9,7	1	1	20,5	11	1	3	0,3	1,3
13	0,9	5,2	5,7	14	18,9	7,6	12,5	4	0,7	10,7	7	10	1
17,3	2	4,2	10,7	7,7	5,8	0,9	13,8	17,3	2,5	5	10,8	13,8	8,5
8,6	9,5	1,4	12,2	22,4	10,3	2,1	0,2	0,8	0,2	26,5	3,7	6,5	28,8
2	17,6	5,7	7	2,1	21,1	21	5,2	15,5	3,8	4,6	7,6	3,8	2,5
1,1	9	2,3	3,8	11,5	7	14,5	15	2,8	7,6	9,2	12,3	6,2	23,6
0,7	7,2	1,4	3	27,6	2,5	9,3	1,1	6,5	21,7	1	10	0,1	4,5
9	2,8	30,2	2,9	1,5	1,5	1,2	1,7	0,3	4,2	0,4	4,6	12,6	0,6
24,8	9,9	8	0,6	1,8	14,9	3	4,6	9,4	16,6	14,4	0,6	15,4	14,4
7	18	0,8	1,6	16,9	24	1	10,9	10,4	2	2,4	34,3	1,3	5
17,4	3	4,3	15,2	0,5	6	2,5	5,4	5,2	4,1	13	5,3	6,2	2
3,8	1,4	5	3	11,3	3	24,9	4,3	2	10,1	7,3	9,6	10,8	4,2
22	9,4	17,4	8,9	36,6	5								

Diperoleh beberapa besaran statistik sebagai berikut :

Rata-rata	= 7,94144
Median	= 5,65
Variance	= 57,3898
Std Deviasi	= 7,5756
Minimum	= 0,1
Maksimum	= 39,0
Std Skewness	= 8,89099 (miring ke kiri/menjulur ke kanan)
Std Kurtosis	= 6,72817
Koef. Var	= 95,3933% (mendekati angka 1)

Histogram waktu antar kedatangan mobil yang dibandingkan dengan kurva fungsi eksponensial baku :



Uji Distribusi

Dilakukan untuk mengetahui seberapa baik dan sesuai fungsi itu dapat mencerminkan pola populasinya. Beberapa cara pengujian yg sering digunakan :

1. Uji Chi-Square
2. Uji Kolmogorov-Smirnov

Uji Chi-Square (1)

- Secara umum digunakan untuk mencari kesesuaian atau menguji ketidakadadaan hubungan ntara beberapa populasi.
- Prosedur pengujian :
  - Menetapkan hipotesis

    H_0 : Tidak ada perbedaan antara nilai atau frekuensi observasi dengan yang diharapkan

    H_1 : Ada perbedaan antara nilai atau frekuensi observasi dengan yang diharapkan
  - Menentukan jumlah pengamatan (n) dan jumlah kategori (k)
  - Menentukan level signifikan (α =k -1)

Uji Chi-Square (2)

- Mengitung χ^2_{Hitung}
- Menentukan daerah penolakan hipotesisKriteria penolakan, jika nilai $\chi^2_{Hitung} > \chi^2_{\alpha,df}$ maka H_0 ditolak

  $\chi^2_{\alpha,df}$ diperoleh dengan melihat tabel distribusi Chi-Square
- Membuat kesimpulan

Tabel Chi-Square

d.f:	$X^2_{0.995}$	$X^2_{0.99}$	$X^2_{0.975}$	$X^2_{0.95}$	$X^2_{0.05}$	$X^2_{0.025}$	$X^2_{0.01}$	$X^2_{0.005}$	dt
1	.0000393	.000157	.000982	.00393	3.811	5.024	6.635	7.879	1
2	.0100	.0201	.0306	.103	5.991	7.378	9.210	10.597	2
3	.0717	.115	.216	.352	7.815	9.348	11.345	12.838	3
4	.207	.297	.484	.711	9.488	11.143	13.277	14.860	4
5	.412	.334	.831	1.145	11.070	12.832	15.058	16.750	5
6	.676	.872	1.237	1.635	12.392	14.449	16.812	18.548	6
7	.939	1.239	1.690	2.167	•14.067	16.013	18.475	20.278	7
8	1.314	1.616	2.180	2.733	16.507	17.535	20.090	21.955	8
9	1.735	2.088	2.700	3.325	16.919	19.023	21.666	23.589	9
10	2.156	2.558	3.247	3.940	18.307	20.483	23.209	25.188	10
11	2.603	3.053	3.816	4.575	19.675	21.920	24.725	26.757	11
12	3.074	3.371	4.404	5.226	21.026	23.337	26.217	28.300	12
13	3.365	4.107	5.009	5.892	22.382	24.736	27.688	29.819	13
14	4.075	4.660	5.629	6.571	23.635	26.119	29.141	31.319	14
15	4.601	5.229	6.262	7.261	24.996	27.468	30.578	32.801	15
16	5.142	5.912	6.908	7.962	28.296	28.845	32.000	34.267	16
17	5.697	6.408	7.564	8.672	27.587	30.191	33.409	35.718	17
18	6.265	7.015	8.231	9.390	28.889	31.526	34.805	37.156	18
19	6.814	7.633	8.907	10.117	30.144	32.852	36.191	38.582	19
20	7.434	8.260	9.391	10.851	31.410	34.170	37.566	39.997	20
21	8.034	8.597	10.233	11.591	32.671	35.479	38.932	41.401	21
22	8.613	9.512	10.982	12.338	33.924	36.781	40.289	42.790	22
23	9.260	10.196	11.689	13.091	35.172	38.076	41.638	44.181	23
24	9.856	10.856	12.401	13.818	36.415	39.364	42.980	45.558	24
25	10.320	11.524	13.120	14.611	37.652	40.646	44.314	46.928	25
26	11.160	12.198	13.844	15.379	38.885	41.923	45.612	48.290	26
27	11.806	12.879	14.573	16.151	40.113	43.194	46.963	49.615	27
28	12.461	13.565	15.308	16.928	41.337	44.461	48.278	50.993	28
29	13.121	14.256	16.147	17.708	42.557	45.722	49.558	52.336	29
30	13.787	14.953	16.791	18.493	43.773	46.979	50.892	53.672	30

Uji Kolmogorov-Smirnov (1)

- Digunakan untuk menguji hipotesis bahwa distribusi variabel yang diamati berbeda dengan distribusi variabel yang diharapkan.
- Biasa digunakan untuk pengujian terhadap distribusi yang diasumsikan kontinu
- Prosedur pengujian :
  - Menetapkan hipotesis

    H_0 : Distribusi dari observasi yang diharapkan tidak berbeda

    H_1 : Distribusi dari observasi dan yang diharapkan berbeda
  - Menentukan jumlah pengamatan (n)
  - Menentukan level signifikan (α)

Uji Kolmogorov-Smirnov (2)

- Mengitung $T_{Hitung} = \text{Maks } |F(x) - P(x)|$

  F(x) : fungsi distribusi kumulatif dari suatu distribusi normal

  P(x) : fungsi distribusi kumulatif dari suatu distribusi pengamatan.

- Menentukan daerah penolakan hipotesisKriteria penolakan, jika nilai $T_{Hitung} \geq T_{1-\alpha}$ maka H_0 ditolak

  $T_{1-\alpha}$ diperoleh dengan melihat tabel Kolmogorov-Smirnov.

- Membuat kesimpulan

Tabel Kolmogorov-Smirnov

Besar Sampel (N)	Level Signifikan untuk D				
	.20	.15	.10	.05	.01
1	.900	.925	.950	.975	.995
2	.684	.726	.776	.842	.929
3	.565	.597	.642	.708	.828
4	.494	.525	.564	.624	.733
5	.446	.474	.510	.565	.669
6	.410	.436	.470	.521	.618
7	.381	.405	.438	.486	.577
8	.358	.381	.411	.457	.543
9	.339	.360	.388	.432	.514
10	.322	.342	.368	.410	.490
11	.307	.326	.352	.391	.468
12	.295	.313	.338	.375	.450
13	.284	.302	.325	.361	.433
14	.274	.292	.314	.349	.418
15	.266	.283	.304	.338	.404
16	.258	.274	.295	.328	.392
17	.250	.266	.286	.318	.381
18	.244	.259	.278	.309	.371
19	.237	.252	.272	.301	.363
20	.231	.246	.264	.294	.356
25	.21	.22	.24	.27	.32
30	.19	.20	.22	.24	.29
35	.18	.19	.21	.23	.27
	1.07	6.54	1.22	1.36	1.63
35	N	N	N	N	N

Beberapa Fungsi Distribusi

- Distribusi Diskrit
  - Binomial
  - Poisson
  - Geometric
  - Uniform Diskrit
  - lainnya
- Distribusi Kontinu
  - Normal
  - Weibull
  - Eksponensial
  - Uniform
  - lainnya

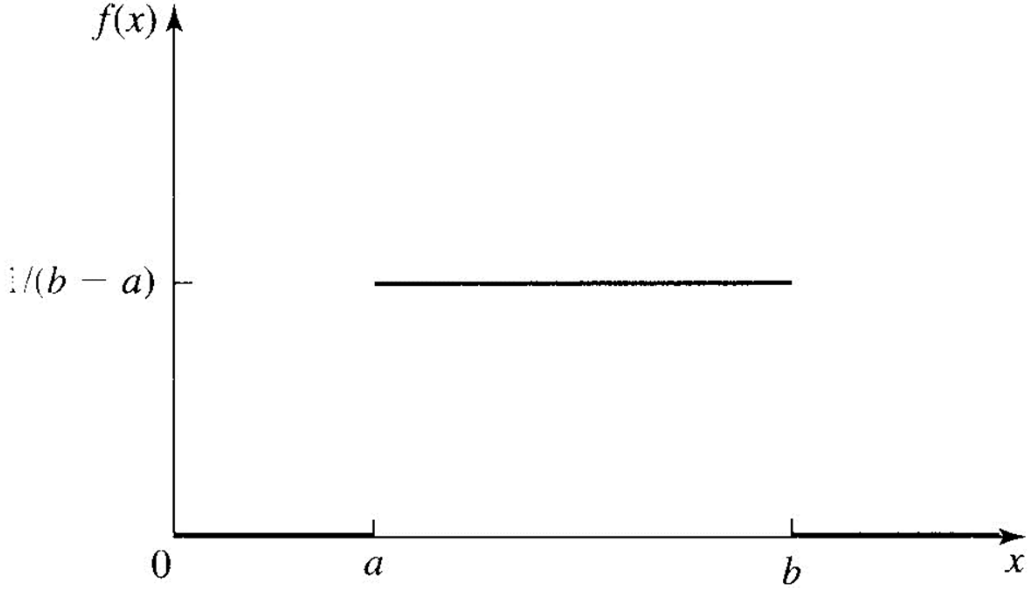
Distribusi Uniform Kontinyu – U(α,β)

- Distribusi :

$$f(x) = \begin{cases} 0\,, & x < \alpha \\ \dfrac{x-\alpha}{\beta-\alpha}\,, & \alpha \le x \le \beta \\ 1\,, & b < x \end{cases}$$

- Densitas :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta-\alpha} & ,\alpha \le x \le \beta \\ 0 & ,untuk\ x\ lainnya \end{cases}$$



- Parameter :

  α, β real ; α < β

- Mean:

$$\mu_x = \frac{\alpha+\beta}{2}$$

- Variansi:

$$\sigma_x^2 = \frac{(\beta-\alpha)^2}{12}$$

Distribusi Normal– N(μ,σ^2)

- Densitas :

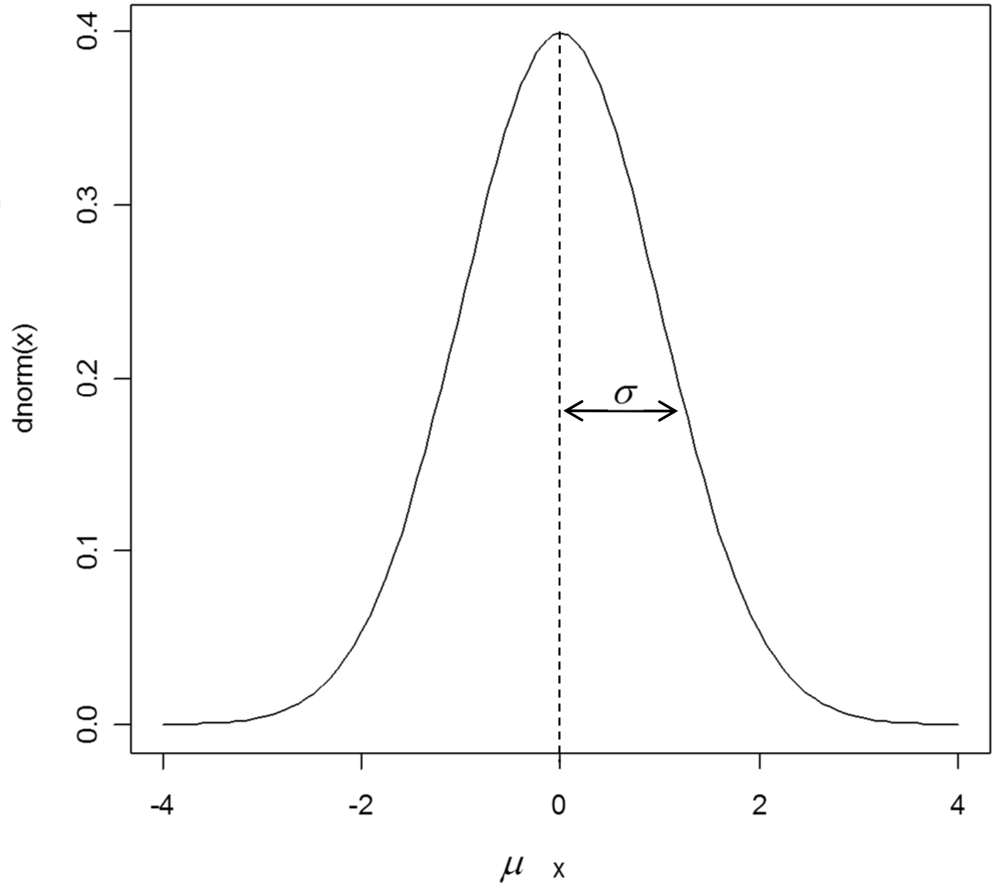
$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\left(-\frac{(x-\mu)x^2}{2\sigma x^2}\right)},\ -\infty<x<\infty$$

- Parameter :

  μ, σ ; $\sigma > 0$

- Distribusi normal standar N(0,1):

$$Z=\frac{x-\mu}{\sigma}$$



Distribusi Exponential– expo(β)

- Distribusi :

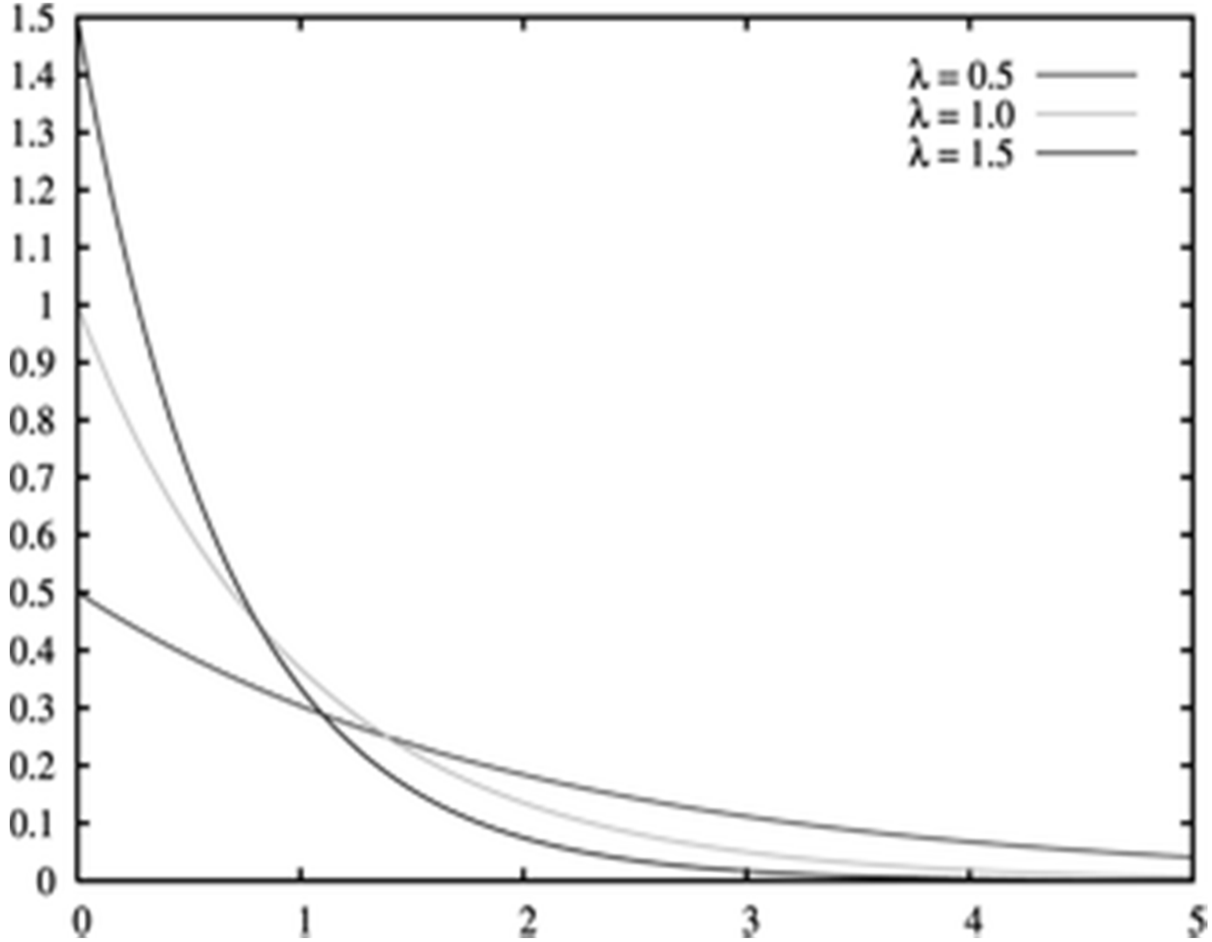
$$f(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x/\beta}, x \geq 0 \\ 0 \qquad\qquad , x < 0 \end{cases}$$

- Densitas :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta}, x \geq 0 \\ \quad 0 \qquad , x < 0 \end{cases}$$

- Parameter :

  β > 0



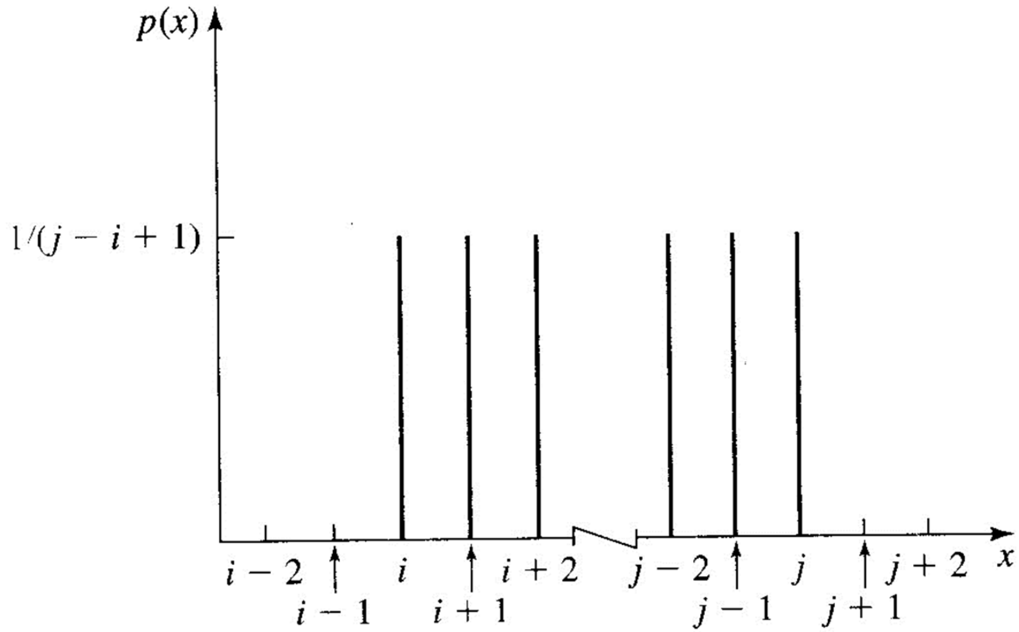
Distribusi Diskrit Uniform– DU(i,j)

- Distribusi :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ,x < i \\ \dfrac{\lfloor x \rfloor - i + 1}{j - i + 1} & ,i \le x \le j \\ 1 & ,j < x \end{cases}$$

- Massa :

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{j - i + 1} & ,x = i, i + 1, \ldots, j \\ 0 & ,x \; lainnya \end{cases}$$



- Parameter :

  i, j integer ; i ≤ j

- Mean:

$$\mu_x = \frac{i + j}{2}$$

- Variansi:

$$\sigma_x^2 = \frac{(j - i + 1)^2 - 1}{12}$$

Distribusi Poisson– Poisson(λ)

- Distribusi :

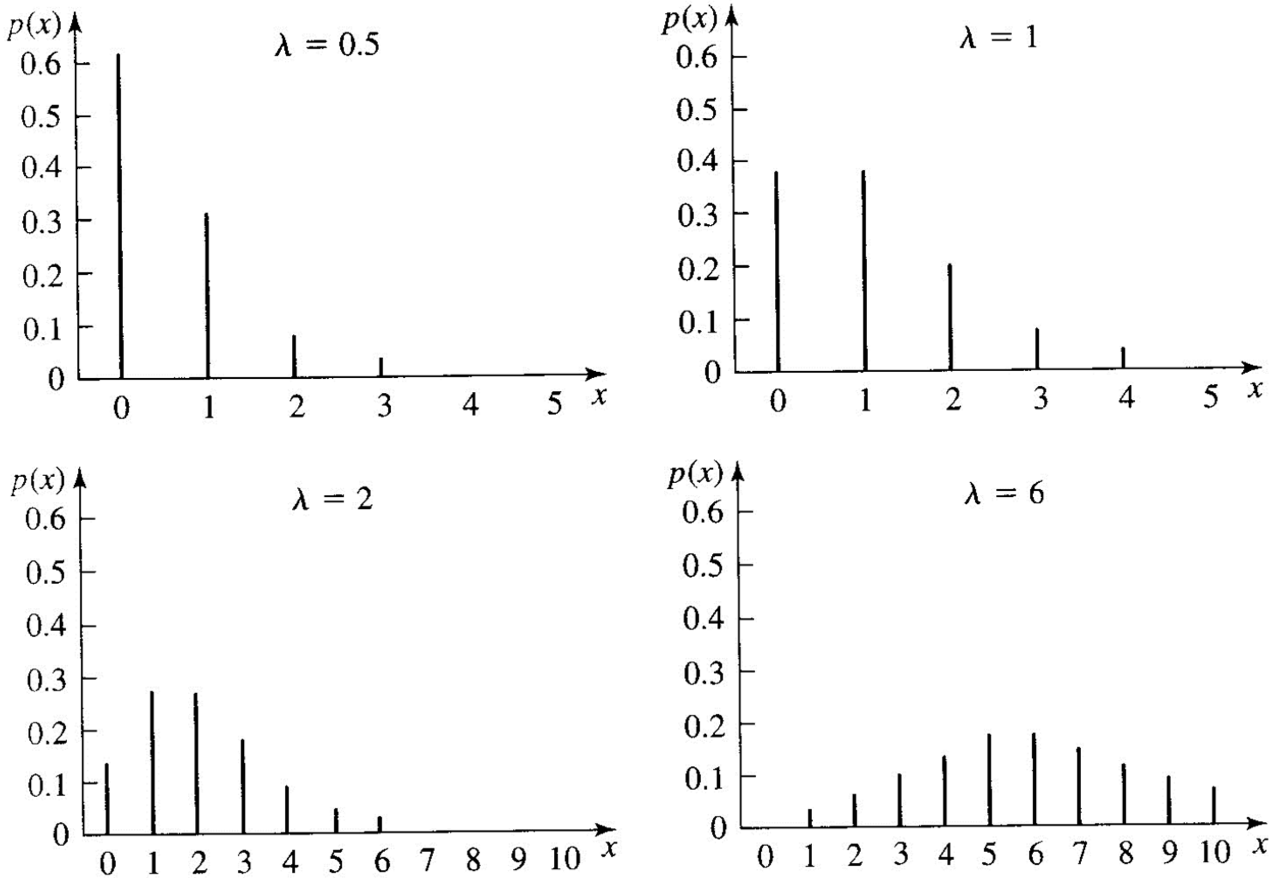
$$F(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ e^{-\lambda} \displaystyle\sum_{i=0}^{\lfloor x \rfloor} \frac{\lambda^i}{i!}, x \geq 0 \end{cases}$$

- Massa :

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, x = 0,1,2, \ldots \\ 0 \quad , x \text{ lainnya} \end{cases}$$

- Parameter :

  $\lambda > 0$



Distribusi Binomial– bin(t,p)

- Distribusi :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ,x < 0 \\ \sum_{i=0}^{\lfloor x \rfloor} \binom{t}{i} p^i (1-p)^{t-i} & ,0 \leq x \leq t \\ 1 & ,t < x \end{cases}$$

- Densitas :

$$p(x) = \begin{cases} \binom{t}{x} p^x (1-p)^{t-x} & ,x = 0,1,2,\ldots,t \\ 0 & ,x \ lainnya \end{cases}$$

dimana $\binom{t}{x} = \dfrac{t!}{x!\,(t-x)!}$

- Parameter :

  t integer ; t > 0, p $\in$ (0,1)

- Mean:

  tp

- Variansi:

  tp (1-p)