

PEMBANGKIT VARIABEL ACAK (Random Variate Generator)

Mata Kuliah Pemodelan & Simulasi

Riani Lubis

Program Studi Teknik Informatika

Universitas Komputer Indonesia

Pendahuluan (1)

- Sifat probabilitistik pada sistem nyata mempunyai pola distribusi probabilitistik tertentu.
- Dalam simulasi komputer, penggambaran fenomena probabilitistik dengan pola-pola tersebut dapat digambarkan dengan menggunakan variabel acak yang mempunyai pola distribusi seperti yang diduga.
- Variabel acak yang mempunyai pola distribusi tertentu, secara umum dapat diperoleh dengan cara :
 1. Membangkitkan bilangan acak $U(0,1)$
 2. Transformasikan bilangan acak tersebut ke suatu distribusi probabilitas tertentu, sehingga diperoleh variabel acak yang berdistribusi tersebut di atas.

Pendahuluan (2)

- Beberapa metode membangkitkan variabel acak :
 - a. Inverse Transform → variabel acak yang berdistribusi kontinu
 - b. Composition (Mixture Form) → ketika fungsi distribusi F dapat dinyatakan dalam kombinasi fungsi-fungsi distribusi lain (F_1, F_2, \dots)
 - c. Convolution → untuk beberapa distribusi yang mungkin dapat dinyatakan dalam jumlah ($X = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_m$)
 - d. Acceptance Rejection → dapat digunakan jika sebuah distribusi memiliki fungsi massa dan ketiga metode sebelumnya tidak efisien untuk digunakan.
- Metode yang umum digunakan : transformasi invers.

Transformasi Invers

- Algoritma untuk membangkitkan variabel acak X yang punya distribusi F adalah :
 1. Bangkitkan bilangan acak $U(0,1)$
 2. Hitung $X = F^{-1}(U)$, dengan kata lain ubah Probability Density Function (PDF) ke Cumulative Distribution Function (CDF).
- $F^{-1}(U)$ akan selalu memenuhi selagi $0 \leq U \leq 1$ dan rentang dari F adalah $[0,1]$ atau $0 \leq F(X) \leq 1$

Contoh 1

Membangkitkan random variate yang berdistribusi kontinu dengan fungsi sbb :

$$f(x) = \begin{cases} 2x & , 0 < x < 1 \\ 0 & , x \text{ lainnya} \end{cases}$$

- Ubah PDF ke CDF :

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x).dx \\ &= \int_0^x 2x.dx \\ &= x^2 \end{aligned}$$

- Hitung $X = F^{-1}(U)$, dimana :

$$U = F(x)$$

$$U = x^2$$

$$x = \sqrt{U}$$

Jadi, $F^{-1}(x) = \sqrt{U}$

- Maka algoritma untuk memperoleh variabel acak yang berdistribusi kontinu seperti di atas adalah :
 1. Bangkitkan bilangan acak $U(0,1)$
 2. Dapatkan $x = \sqrt{U}$

Jika diasumsikan bilangan random dibangkitkan dengan metode LCG, dengan ketentuan $a = 19$, $c = 237$, $m = 128$, dan $Z_0 = 12357$.

Maka diperoleh bilangan acak sebagai berikut :

$$Z_1 = (19 * 12357 + 237) \bmod 128 = 12 \quad \rightarrow U_1 = 0,0938$$

$$Z_2 = (19 * 12 + 237) \bmod 128 = 81 \quad \rightarrow U_2 = 0,6328$$

$$Z_3 = (19 * 81 + 237) \bmod 128 = 112 \quad \rightarrow U_3 = 0,8750$$

$$Z_4 = (19 * 112 + 237) \bmod 128 = 61 \quad \rightarrow U_4 = 0,4765$$

$$Z_5 = (19 * 61 + 237) \bmod 128 = 116 \quad \rightarrow U_5 = 0,9063$$

Maka diperoleh variabel acak :

$$x_1 = \sqrt{U_1} = 0,3062$$

$$x_2 = \sqrt{U_2} = 0,7955$$

$$x_3 = \sqrt{U_3} = 0,9354$$

$$x_4 = \sqrt{U_4} = 0,6903$$

$$x_5 = \sqrt{U_5} = 0,9520$$

Contoh 2 Transformasi Invers pada Distribusi Eksponensial

Misalkan x berdistribusi eksponensial dengan β , maka fungsi distribusinya adalah :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta}, & \text{untuk } x \geq 0 \\ 0 & , \text{untuk } x \text{ lainnya} \end{cases}$$

Maka CDF-nya :

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x).dx \\ &= \int_0^x \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta} .dx \\ &= 1 - e^{-x/\beta} \end{aligned}$$

$$U = F(x)$$

$$U = 1 - e^{-x/\beta}$$

$$1 - U = e^{-x/\beta}$$

$$\ln(1 - U) = \ln(e^{-x/\beta})$$

$$\ln(1 - U) = -\frac{x}{\beta}$$

$$x = -\beta \ln(1 - U)$$

Karena $(1-U)$ dan U diambil dari distribusi yang sama $U(0,1)$, maka dimungkinkan sekali mengganti $(1-U)$ dengan U untuk U antara 0 dan 1.

Jadi $F^{-1}(x) = -\beta \ln(1-U)$ atau $F^{-1}(x) = -\beta \ln U$

Dengan demikian, algoritma untuk memperoleh variabel acak yang berdistribusi eksponensial :

1. Bangkitkan bilangan acak $U(0,1)$
2. Dapatkan $x = -\beta \ln U$

Dalam distribusi eksponensial diketahui bahwa :

$$1/\beta = \lambda$$

maka

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

Jika x merupakan waktu pelayanan t , maka untuk $t > 0$:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

Sehingga diperoleh : $F^{-1}(x) = -\frac{1}{\lambda} \ln U$

Contoh Kasus 1 :

Penerapan Distribusi Eksponensial

Jika waktu antar kedatangan pemesanan via telepon di salah satu outlet Pizza Hut Delivery diketahui terdistribusi eksponensial, dengan rata-rata 0,1 menit.

a. Simulasikan lima waktu antar kedatangan pesanan dari konsumen dengan asumsi :

$$a = 7$$

$$m = 128$$

$$Z_0 = 12357$$

b. Tentukan total waktu kedatangan pesanannya !

Simulasi Kasus 1

Konsumen Ke-	Random Integer Number (Z_i)	Uniform Random Number (U_i)	Waktu Antar Kedatangan (t) satuan Menit
1			
2			
3			
4			
5			

Rata Waktu kedatangan pesanan = menit

Contoh Penerapan Transformasi Invers pada Distribusi Diskrit Uniform

Membangkitkan lima variabel acak yang berdistribusi diskrit uniform, jika diasumsikan bilangan acak dibangkitkan dengan metode multiplicative RNG dengan :

$a = 77$, $m = 127$, $Z_0 = 12357$, nilai minimum = 40, dan nilai maksimum = 100.

Fungsi distribusi dari massa probabilitas distribusi diskrit uniform adalah :

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{j - i + 1}, & i \leq x \leq j + 1 \\ 0 & , x \text{ lainnya} \end{cases}$$

Maka CDF-nya :

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{j-i+1} dx = \frac{x-i}{j-i+1}$$

$$U = F(x)$$

$$U = \frac{x-i}{j-i+1}$$

$$x = i + (j-i+1)U$$

Jadi : $F^{-1}(x) = i + (j-i+1)U$

Maka algoritma untuk memperoleh variabel acak yang berdistribusi diskrit uniform adalah :

1. Bangkitkan bilangan acak $U(0,1)$
2. Tentukan nilai i dimana i adalah integer dan $i \leq j$
3. Bangkitkan $x = i + [(j-i+1)U]$

Maka diperoleh deret bilangan acak sbb :

$$Z_1 = (77 * 12357) \bmod 127 = 5 \quad \rightarrow U_1 = 0,0394$$

$$Z_2 = (77 * 5) \bmod 127 = 4 \quad \rightarrow U_2 = 0,0315$$

$$Z_3 = (77 * 4) \bmod 127 = 54 \quad \rightarrow U_3 = 0,4252$$

$$Z_4 = (77 * 54) \bmod 127 = 94 \quad \rightarrow U_4 = 0,7402$$

$$Z_5 = (77 * 94) \bmod 127 = 126 \quad \rightarrow U_5 = 0,9921$$

Dan diperoleh deret variabel acak sbb :

$$X_1 = 40 + 0,03937 (100 - 40 + 1) = 42,4016 \approx 42$$

$$X_2 = 40 + 0,0315 (100 - 40 + 1) = 40,5 \approx 41$$

$$X_3 = 40 + 0,4252 (100 - 40 + 1) = 65,937 \approx 66$$

$$X_4 = 40 + 0,74021 (100 - 40 + 1) = 85,152 \approx 85$$

$$X_5 = 40 + 0,9921 (100 - 40 + 1) = 100,518 \approx 100$$

Contoh Kasus 2 : Penerapan Distribusi Uniform Diskrit

Seorang pemilik warung mendapatkan fluktuasi pendapatan tiap bulan. Berdasarkan pengalaman, ia mendapatkan pendapatan berkisar Rp. 800.000,- sampai Rp. 1.000.000,- per bulan.

a. Simulasikan pendapatan pemilik warung tersebut sebanyak lima kali dengan asumsi :

$$a = 7$$

$$m = 128$$

$$Z_0 = 12357$$

b. Tentukan penghasilan optimalnya selama lima bulan mendatang !

Simulasi Kasus 2

Bulan Ke-	Random Integer Number (Z_i)	Uniform Random Number (U_i)	Pendapatan
1			Rp.
2			Rp.
3			Rp.
4			Rp.
5			Rp.

Penghasilan rata-rata per bulan = Rp.

.....

Beberapa Algoritma Pembangkit Variabel Acak

Distribusi	Parameter	Algoritma
Bernoulli	p	<ol style="list-style-type: none">1. Bangkitkan $U = U(0,1)$2. Jika $U \leq p$ maka dapatkan $X=1$ & jika tidak $X = 0$
Geometric	p	<ol style="list-style-type: none">1. Bangkitkan $U = U(0,1)$2. Dapatkan $X = \ln(U)/\ln(1-p)$
Uniform (kontinu)	a, b	<ol style="list-style-type: none">1. Bangkitkan $U = U(0,1)$2. Dapatkan $X = a+[(b - a)U]$
Weibull	α, β	<ol style="list-style-type: none">1. Bangkitkan $U = U(0,1)$2. Hitung $X = \beta (- \ln U)^{1/\alpha}$

Contoh Kasus tidak diberikan, akan tetapi kemungkinan ada soal-soal yang menerapkan algoritma di atas

Pembangkit Variabel Acak Distribusi Normal

- Distribusi normal sulit dianalisis dengan integral secara langsung, maka membangkitkan variabel acaknya dilakukan dengan pendekatan central limit theorem karena ukuran sampel yang besar akan berdistribusi normal atau dianggap berdistribusi normal.
- Untuk menghasilkan variabel acak yang berdistribusi standar normal dengan μ dan σ , maka algoritmanya :
 1. Bangkitkan bilangan acak $U_i(0,1)$ dan $U_{i+1}(0,1)$
 2. Hitung nilai $Z = (-2\ln U_i)^{1/2} \cos(2\pi U_{i+1})$ atau $Z = (-2\ln U_i)^{1/2} \sin(2\pi U_{i+1})$
 3. Hitung $X = \mu + \sigma Z$

Contoh Kasus 3 : Penerapan Distribusi Normal

Jika diketahui data nilai akhir mata kuliah MOSI dari 100 mahasiswa Teknik Informatika terdistribusi Normal, dengan data sbb :

Nilai Akhir	Frekuensi
1 – 34	8
35 – 49	25
50 – 64	33
65 – 79	28
80 – 100	6

Simulasikan kemunculan Nilai Akhir dari lima orang mahasiswa dengan asumsi $a = 7$, $m = 128$, dan $Z_0 = 12357$

Simulasi Kasus 3

i	Z_i	Z_{i+1}	U_i	U_{i+1}	$(-2\ln U_i)^{1/2}$	$\sin(2\pi U_{i+1})$	Z	$X = \mu + \sigma Z$
1								
2								
3								
4								
5								

Pembangkit Variabel Acak Distribusi Poisson

- Distribusi poisson memiliki kaitan erat dengan distribusi eksponensial, sering digunakan pada simulasi yang berhubungan dengan peristiwa kedatangan dan kepergian.
- Perlu diketahui bahwa jika waktu antar kejadian berdistribusi eksponensial maka jumlah kejadian yang terjadi pada selang waktu tertentu akan berdistribusi poisson. Distribusi ini memiliki densitas peluang :

$$F(x) = \frac{\lambda t^x e^{-\lambda t}}{x}$$

- Distribusi poisson memiliki prosedur pelaksanaan pembangkitan variabel random yang dilakukan berturut-turut berdasarkan distribusi uniform dari $U(0,1)$ sampai pertidaksamaan terakhir terpenuhi.
- Algoritmanya :
 1. Hitung $F = e^{-\lambda}$
 2. Tentukan $i = 1$
 3. Tentukan $k = 1$
 4. Bangkitkan bilangan random $U_i(0,1)$
 5. Jika $k = 1$ maka $P_k = U_i$, jika tidak hitung $P_k = P_{k-1} * U_i$
 6. Jika $P_k < F$ maka hitung $X = k - 1$ dan kembali ke tahap 3, jika tidak hitung $k = k + 1$ dan kembali ke tahap 4.

Contoh Kasus 4 : Penerapan Distrinusi Poisson

Jika diketahui jumlah pemesanan ayam goreng di sebuah restoran cepat saji terdistribusi Poisson. Dan rata-rata pemesanan sebesar 3 potong ayam goreng per jam (berdasarkan pengamatan selama 60 hari).

Simulasikan jumlah pemesanan (order) ayam goreng untuk lima orang konsumen dengan asumsi $a = 7$, $m = 128$, dan $Z_0 = 12357$

Simulasi Kasus 4

$$F = e^{-\lambda} =$$

i	k	Z_i	U_i	P_k	$P_k <$	Jumlah order ($X = k - 1$)
1						
2						
3						
4						
5						
6						
...						
...						
...						