Aljabar Boolean

- Misalkan terdapat
  - Dua operator biner: + dan ·
  - Sebuah operator uner: ’.
  - *B* : himpunan yang didefinisikan pada opeartor +, ·, dan ’
  - 0 dan 1 adalah dua elemen yang berbeda dari *B*.

  Tupel

  $(B, +, \cdot, ')$

  disebut **aljabar Boolean** jika untuk setiap $a, b, c \in B$ berlaku aksioma-aksioma atau postulat Huntington berikut:

  1. *Closure*: (i) $a + b \in B$
     (ii) $a \cdot b \in B$

  2. Identitas: (i) $a + 0 = a$
     (ii) $a \cdot 1 = a$

  3. Komutatif: (i) $a + b = b + a$
     (ii) $a \cdot b = b \,.\, a$

  4. Distributif: (i) $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$
     (ii) $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$

  5. Komplemen[1]: (i) $a + a' = 1$
     (ii) $a \cdot a' = 0$

- Untuk mempunyai sebuah aljabar Boolean, harus diperlihatkan:
    1. Elemen-elemen himpunan ***B***,
    2. Kaidah operasi untuk operator biner dan operator uner,
    3. Memenuhi postulat Huntington.

Aljabar Boolean Dua-Nilai

Aljabar Boolean dua-nilai:

- ***B*** = {0, 1}
- operator biner, + dan ·
- operator uner, ’
- Kaidah untuk operator biner dan operator uner:

a	b	$a \cdot b$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

a	b	$a + b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

a	a'
0	1
1	0

Cek apakah memenuhi **postulat Huntington**:

1. ***Closure*** : jelas berlaku
2. ***Identitas***: jelas berlaku karena dari tabel dapat kita lihat bahwa:

    (i) $0 + 1 = 1 + 0 = 1$
    (ii) $1 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0$
3. ***Komutatif***: jelas berlaku dengan melihat simetri tabel operator biner.

4. ***Distributif***: (i) $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ dapat ditunjukkan benar dari tabel operator biner di atas dengan membentuk tabel kebenaran:

a	***b***	***c***	***b + c***	***a · (b + c)***	***a · b***	***a · c***	***(a · b) + (a · c)***
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

(ii) Hukum distributif $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$ dapat ditunjukkan benar dengan membuat tabel kebenaran dengan cara yang sama seperti (i).

5. ***Komplemen***: jelas berlaku karena Tabel 7.3 memperlihatkan bahwa:

   (i) $a + a‘ = 1$, karena $0 + 0’= 0 + 1 = 1$ dan $1 + 1’= 1 + 0 = 1$
   (ii) $a \cdot a = 0$, karena $0 \cdot 0’= 0 \cdot 1 = 0$ dan $1 \cdot 1’ = 1 \cdot 0 = 0$

Karena **kelima postulat Huntington dipenuhi**, maka terbukti bahwa $B = \{0, 1\}$ bersama-sama dengan operator biner + dan · operator komplemen ‘ merupakan aljabar Boolean.

Ekspresi Boolean

- Misalkan (B, +, ·, ’) adalah sebuah aljabar Boolean. Suatu ekspresi Boolean dalam (B, +, ·, ’) adalah:
  (i) setiap elemen di dalam B,
  (ii) setiap peubah,
  (iii) jika e_1 dan e_2 adalah ekspresi Boolean, maka $e_1 + e_2$, $e_1 \cdot e_2$, e_1' adalah ekspresi Boolean

Contoh:

0
1
$\boldsymbol{a}$
$\boldsymbol{b}$
$\boldsymbol{c}$
$\boldsymbol{a + b}$
$\boldsymbol{a \cdot b}$
$\boldsymbol{a' \cdot (b + c)}$
$\boldsymbol{a \cdot b' + a \cdot b \cdot c' + b'}$**, dan sebagainya**

Mengevaluasi Ekspresi Boolean

- Contoh: $a' \cdot (b + c)$

  jika $a = 0$, $b = 1$, dan $c = 0$, maka hasil evaluasi ekspresi:

  $$0' \cdot (1 + 0) = 1 \cdot 1 = 1$$

- Dua ekspresi Boolean dikatakan **ekivalen** (dilambangkan dengan ‘=’) jika keduanya mempunyai nilai yang sama untuk setiap pemberian nilai-nilai kepada n peubah.
  Contoh:

  $$a \cdot (b + c) = (a \,.\, b) + (a \cdot c)$$

Contoh. Perlihatkan bahwa $a + a'b = a + b$.

Penyelesaian:

a	b	a'	$a'b$	$a + a'b$	$a + b$
0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1
1	1	0	0	1	1

- Perjanjian: tanda titik ($\cdot$) dapat dihilangkan dari penulisan ekspresi Boolean, kecuali jika ada penekanan:

  (i) $a(b + c) = ab + ac$
  (ii) $a + bc = (a + b)(a + c)$
  (iii) $a \cdot 0$, bukan a0

Prinsip Dualitas

- Misalkan S adalah kesamaan (*identity*) di dalam aljabar Boolean yang melibatkan operator +, $\cdot$, dan komplemen, maka jika pernyataan S^* diperoleh dengan cara mengganti

  $\cdot$ dengan +
  + dengan $\cdot$
  0 dengan 1
  1 dengan 0

  dan membiarkan operator komplemen tetap apa adanya, maka kesamaan S^* juga benar. S^* disebut sebagai *dual* dari S.

Contoh.

(i) $(a \cdot 1)(0 + a') = 0$ dualnya $(a + 0) + (1 \cdot a') = 1$
(ii) $a(a' + b) = ab$ dualnya $a + a'b = a + b$

Hukum-hukum Aljabar Boolean

1. Hukum **identitas**: (i) $a + 0 = a$ (ii) $a \cdot 1 = a$	2. Hukum **idempoten**: (i) $a + a = a$ (ii) $a \cdot a = a$
3. Hukum **komplemen**: (i) $a + a' = 1$ (ii) $aa' = 0$	4. Hukum **dominansi**: (i) $a \cdot 0 = 0$ (ii) $a + 1 = 1$
5. Hukum **involusi**: (i) $(a')' = a$	6. Hukum **penyerapan**: (i) $a + ab = a$ (ii) $a(a + b) = a$
7. Hukum **komutatif**: (i) $a + b = b + a$ (ii) $ab = ba$	8. Hukum **asosiatif**: (i) $a + (b + c) = (a + b) + c$ (ii) $a\ (b\ c) = (a\ b)\ c$
9. Hukum **distributif**: (i) $a + (b\ c) = (a + b)\ (a + c)$ (ii) $a\ (b + c) = a\ b + a\ c$	10. Hukum **De Morgan**: (i) $(a + b)' = a'b'$ (ii) $(ab)' = a' + b'$
11. Hukum 0/1 (i) $0' = 1$ (ii) $1' = 0$	

Contoh 7.3. Buktikan (i) $a + a'b = a + b$ dan (ii) $a(a' + b) = ab$

Penyelesaian:

(i) $a + a'b$ $= (a + ab) + a'b$ (Penyerapan)

$= a + (ab + a'b)$ (Asosiatif)

$= a + (a + a')b$ (Distributif)

$= a + 1 \bullet b$ (Komplemen)

$= a + b$ (Identitas)

(ii) adalah dual dari (i)