|  |
| --- |
| **SISTEM PERSAMAAN LINEAR** |
| **Pertemuan : 5&6**  TUJUAN INSTRUKSIONAL KHUSUS :   1. Menjelaskan pengertian sistem persamaan linear serta solusi dari SPL 2. Menjelaskan cara merepesentasikan sistem persamaan linear ke dalam bentuk perkalian matriks 3. Menggunakan metode Eliminasi Gauss Naive, Gauss yang diperbaiki untuk mencari solusi dari SPL 4. Mengenali kondisi munculnya masalah pembagian dengan nol, galat pembulatan dan kondisi buruk 5. Menggunakan metode iterasi Jacobi dan iterasi Gauss-Seidel sebagai metode numerik untuk menghitung solusi SPL |

**Materi :**

* 1. **Solusi Sistem Persamaan Linear**

Sistem Persamaan Linear (SPL) adalah gabungan dari beberapa persamaan linear yang akan diselesaikan secara simultan. Banyak permasalahan dalam kehidupan sehari-hari yang sering dimodelkan dengan menggunakan sistem persamaan linear diantaranya adalah penentuan besarnya kuat arus dari setiap aliran listrik dalam suatu jaringan listrik, menentukan banyaknya arus lalu lintas pada setiap perempatan jalan yang sedang diamati, menyelesaikan model ekonomi pertukaran barang dan lain-lain. Secara umum sistem persamaan linear didefinisikan dalam **Definisi 1**.

**Definisi 1**

Sebuah himpunan terhingga *m* buah persamaan linear dengan variabel disebut sistem persamaan linear dengan *n* variabel dituliskan sebagai

 1

Suatu urutan bilangan-bilangan disebut **himpunan penyelesaian sistem** jika  memenuhi **setiap persamaan** dalam sistem tersebut.

Persamaan 1 dapat dituliskan ke dalam bentuk perkalian matriks dan vektor. Persamaan ini dituliskan dalam bentuk persamaan 2

atau  2

dengan ,  dan .

Di dalam menyelesaikan sistem persamaan linear ada tiga jenis solusi yang mungin ditemukan yaitu: SPL memiliki tepat satu solusi, SPL memiliki jumlah solusi tak terhingga atau tidak memiliki solusi. Representasi dari tiga jenis solusi SPL dalam geometri untuk dua persamaan dan dua variable ditunjukkan pada **Gambar 1**. **Gambar 1** (a) solusi dari sister persamaan linear tersebut adalah titik potong dari kedua garis dari kedua persamaan linear, **Gambar 1** (b) adalah saat jumlah solusi tak terhingga, hal ini terjadi ketika grafik dari kedua persamaan linear berimpit. Untuk **Gambar 1** (c) garis dari kedua persamaan linear sejajar sehingga tidak akan berpotongan atau dengan kata lain keadaan seperti ini sistem persamaan linear tidak memiliki solusi.





1. (b)



(c)

**Gambar 1** Kemungkinan Solusi dari Sistem Persamaan Linear

Khusus untuk pembahasan dalam metode numerik ini hanya dikhususkan untuk menentukan solusi dari SPL yang tepat satu solusi. Salah satu kondisi awal yang **memungkinkan** sebuah SPL memiliki tepat satu solusi adalah matriks *A* adalah matriks bujur sangkar. Untuk selanjutnya maka akan digunakan matriks *A* berukuran *n* x *n*. Apabila matriks  membentuk matriks segitiga atas dan nilai diketahui maka dapat ditentukan nilai  yang memenuhi sistem persamaan linear tersebut.

**Contoh 1**

Perhatikan SPL berikut ini



Persamaan ini dapat diselesaikan dengan mencari terlebih dahulu nilai  lalu  dan terakhir . Proses ini disebut dengan **substitusi balik**. Adapun nilai ,  dan  adalah :



Berdasarkan **Contoh 1** ini maka solusi dari sebuah sistem persamaan linear untuk persamaan untuk

,  dan .

adalah  3

**Latihan 1**

1. Dengan menggunakan persamaan 3, tuliskan rumus substitusi balik untuk  untuk  berukuran 4 x 4.
2. Tentukan solusi dari sistem persamaan linear berikut ini



1. Berikan sebuah contoh kapan substitusi balik tidak dapat dilakukan.
2. Berikut ini adalah *script* yang dapat digunakan untuk menghitung substitusi balik. Lengkapilah *script* tersebut, kemudian jalankan untuk soal yang diberikan pada no 2.

function **nilai**=subbalik(**A**, **b**)

/\* menentukan **nilai** dari Ax=**b**

jika **A** adalah matriks segitiga atas

**A**=matriks nxn ;**b**=ruas kanan \*/

*//menghitung ukuran matriks A*

[m,n]=size\_\_\_\_\_\_\_\_;

*//menghitung x yang terakhir*

x(n)=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_;

*//loop untuk menghitung x(k)*

for k = n-1:-1:1

jum=0;

for j = \_\_\_\_\_\_\_\_\_

jum=jum+**A**(k,j)\*x(j);

end

x(k)=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_;

end

*//hasil disimpan ke parameter nilai*

**nilai** = x;

endfunction

* 1. **Eliminasi Gauss**

Dalam menggunakan eliminasi Gauss maka setiap sistem persamaan linear akan diubah terlebih dahulu dengan menggunakan matriks yang diperluas atau matriks *augmented*. Cara membuat matriks yang diperluas adalah dengan menggabungkan matriks *A* berukuran *n* x *n* dengan vektor *b* berukuran 1x *n* menjadi sebuah matriks baru berukuran *n* x (*n*+1).

**Contoh 2**

Diberikan sistem persamaan linear berikut ini



Maka matriks yang diperluasnya adalah



Metode eliminasi Gauss bekerja dengan menggunakan tiga aturan yang disebut dengan operasi baris elementer. Tiga aturan tersebut adalah:

1. Pertukaran baris

Dalam eliminasi Gauss dimungkinkan untuk mempertukarkan dua baris dan hasilnya tidak akan mempengaruhi nilai yang diperoleh. Contoh menukarkan baris ketiga dengan baris kedua



1. Penskalaan baris

Sebuah baris dapat dikalikan dengan sebuah bilangan real bukan nol dan hasilnya pun tidak akan mempengaruhi solusi yang akan dicari. Berikut adalah contoh perkalian baris kedua dengan ½.



1. Penggantian baris

Sebuah baris dapat diganti dengan penjumlahan baris tersebut dengan kelipatan baris yang lain. Baris kedua dapat diganti dengan hasil penghitungan  tanpa mempengaruhi solusi akhir dari SPL yang dicari.



Secara umum persamaan yang digunakan untuk menghitung penggantian baris agar menghasilkan matriks segitiga atas disebut persamaan pivot. Elemen pivot adalah nilai-nilai pada diagonal utama. Baris yang ada dibawah elemen pivot harus diubah menjadi baris baru dimana semua elemen yang ada di bawah elemen pivot pada kolom pivoting harus bernilai 0. Caranya adalah dengan menggunakan persamaan 4.

 4

Metode eliminasi Gauss bertujuan untuk mengubah matriks *A* menjadi matriks segitiga atas dengan menggunakan aturan operasi baris elementer. Ada dua jenis metode eliminiasi Gauss yaitu:

1. Eliminasi Gauss Naif
2. Eliminasi Gauss yang diperbaiki

Eliminasi Gauss Naif hanya menggunakan aturan penggantian baris saja, sedangkan eliminasi Gauss yang diperbaiki menggunakan semua aturan dari operasi baris elementer.

**Contoh 3**

Berikut ini adalah proses yang dilakukan untuk mengubah matriks menjadi matriks *A* menjadi segitiga atas dari **Contoh 2**. menggunakan Eliminasi Gauss Naif.



Setelah diperoleh matriks berbentuk bujur sangkar maka selanjutnya dapat dihitung solusi dari SPL. Hitunglah solusi SPL ini dengan menggunakan substitusi balik.

**Latihan 2**

1. Selesaikan sistem persamaan linear berikut ini dengan menggunakan Eliminasi Gauss Naif

 

1. Lengkapi *script* berikut ini untuk menghitung Eliminasi Gauss Naif

function **sol**=naivegauss(**A**, **b**)

*// Menggabungkan nilai A dan b*

*// A matriks nxn dan b vektor kolom nx1*

M=[**A** **b**];

*//Hitung ukuran baris matriks M*

*//n = jumlah baris*

[n,m]=size(M);

*//Penjumlahan baris dengan kelipatan baris yang lain*

for j = \_\_\_\_\_\_\_\_

for i = \_\_\_\_\_\_\_

M(i,:)=-M(i,j)/\_\_\_\_\_\*M(j,:)+\_\_\_\_\_\_;

end

end

*//Simpan keluaran akhir matriks M ke parameter sol*

**sol**=M;

endfunction

1. Modifikasi *script* diatas sehingga dari M diperoleh matriks *A* dan *b* lalu gunakan fungsi substitusi balik untuk mendapatkan solusi dari SPL dan simpan hasilnya ke parameter sol.

Proses pada Eliminasi Gauss Naif akan berhasil selama elemen pivot ≠ 0. Apabila ada nilai elemen pivot = 0 dapat diatasi dengan menggunakan strategi pivoting. Ada dua jenis strategi pivoting yaitu:

1. Pivoting sebagian

Sebelum penghitungan baris baru, terlebih dahulu setiap kolom dari elemen pivot dicek terlebih dahulu dengan menggunakan aturan berikut ini:

 5

 adalah nilai maksimum dari kolom *p* lalu pertukarkan baris ke-*i* dengan baris ke-*p*. Untuk

operasi pada kolom kedua dan kolom ketiga adalah sebagai berikut:



Dengan teknik ini akan menghindari munculnya elemen 0 pada proses operasi baris dalam eleminasi gauss naif. Apabila setelah dilakukan proses pivoting ternyata masih ada elemen pivot yang sama dengan 0 maka SPL tidak dapat diselesaikan atau singular.

1. Pivoting lengkap

Jika proses pivoting juga melibatkan pengecekan kolom dalam pencarian elemen terbesar lalu dipertukarkan maka cara ini disebut dengan pivoting lengkap. Detail dari proses pivoting lengkap tidak dibahas di mata kuliah ini dikarenakan proses pertukaran kolom akan mengubah urutan *x* sehingga akan menambah kerumitan dari program.

**Latihan 3**

1. Gunakan aturan pivoting sebagian untuk menyelesaikan masalah berikut ini



1. Lengkapi *script*  berikut ini dan cek prosesnya dengan memasukkan soal no 1, lalu modifikasi hingga dapat memunculkan hasil akhir dari SPL.

function **sol**=egauss(**A**, **b**)

*// Menggabungkan nilai A dan b*

*// A matriks nxn dan b vektor kolom nx1*

M=\_\_\_\_\_\_\_\_;

*//Hitung ukuran baris matriks M*

*//n = jumlah baris*

[n,m]=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_;

*//Penjumlahan baris dengan kelipatan baris yang lain*

for j =\_\_\_\_\_\_\_

*//absolutkan kolom untuk mencari elemen pivoting*

kolom=abs(M(:,j));

*//hitung nilai maksimum dari kolom ke j*

[nilai,ind]=max(kolom(j:\_\_\_\_));

*//update nilai ind agar sesuai dengan ukuran matriks m*

indeks=ind+j-1;

*//Cek kondisi untuk menukar baris*

if \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ then

M=tukar(M,indeks,j);

end

*//lanjutkan dengan melakukan operasi baris*

for i = \_\_\_\_\_\_\_\_

M(i,:)=-M(i,j)/M(j,j)\*M(j,:)+M(i,:);

end

end

*//Hasil akhir dari proses operasi baris*

**sol**=M;

endfunction

function **hasil**=tukar(**M**, **indeks**, **j**)

*//fungsi untuk melakukan pertukaran baris*

sementara=**M**(**j**,:);

**M**(**j**,:)=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_;

**M**(**indeks**,:)=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_;

**hasil**=**M**;

endfunction