4 LIMIT

JUMLAH PERTEMUAN : 2 PERTEMUAN

TUJUAN INSTRUKSIONAL KHUSUS :

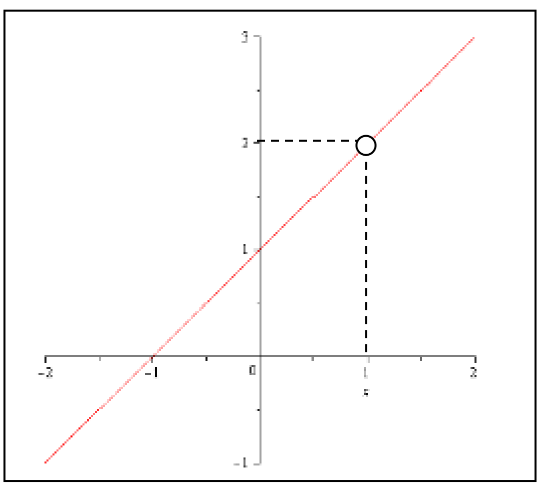
Memahami konsep dasar limit, teorema dan penggunaan limit

Materi :

4.1 Pendahuluan

Perhatikan fungsi di bawah ini:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$



Perhatikan gambar di samping, untuk nilai $x = 1$ nilai $f(x)$ tidak ada. Tetapi jika kita coba dekati nilai $x = 1$ dari sebelah kiri dan kanan maka dapat dilihat

x	0,9	0,99	0,999	1	1,001	1,01	1,1
$f(x)$	1.9	1.99	1.999	?	2.001	2.01	2.1

Perhatikan jika x mendekati 1 dari kiri $f(x)$ mendekati nilai 2 dan jika x mendekati 1 dari kanan $f(x)$ mendekati nilai 2.

Secara matematik kejadian di atas ditulis

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

4.2 Definisi Limit

Secara intuisi definisi limit:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

Menyatakan bahwa limit fungsi f di c adalah L, artinya $f(x)$ dekat dengan L jika x dekat ke c, dan $x \neq c$.

Definisi limit secara matematis

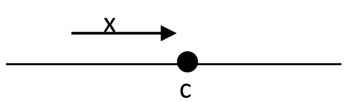
$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

Menyatakan:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ni 0 < |x - c| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

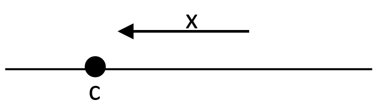
4.2.1 Limit Kiri dan Limit Kanan

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = L$$



Jika x dekat tetapi sebelah kiri, maka $f(x)$ mendekati L

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = L$$



Jika x dekat tetapi sebelah kanan, maka $f(x)$ mendekati L

4.3 Teorema Limit

4.3.1 Teorema A

$\lim_{x \to c} f(x) = L$ jika dan hanya jika $\lim_{x \to c^-} f(x) = L$ dan $\lim_{x \to c^+} f(x) = L$

Contoh:

Perhatikan fungsi berikut:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ x & 0 < x < 1 \\ 1 + x^2 & x \geq 1 \end{cases}$$

Tentukan:

1. $\lim_{x \to 0} f(x) =$(jika ada)
2. $\lim_{x \to 1} f(x) =$ (jika ada)
3. Sketsa grafik tersebut.

Jawab:

1. Akan ditentukan $\lim_{x \to 0} f(x) =$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x^2 = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x = 0$$

Karena limit kiri = limit kanan maka

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

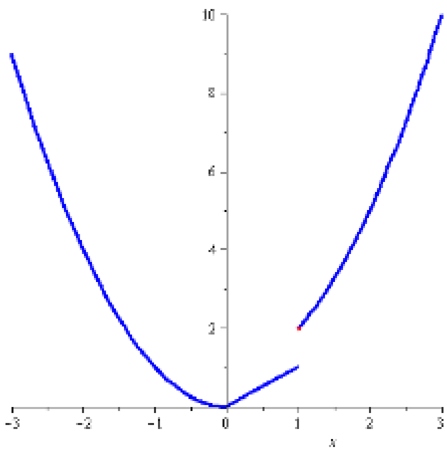
2. Akan ditentukan $\lim_{x \to 1} f(x) =$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x = 1$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} 1 + x^2 = 2$$

Karena limit kiri ≠ limit kanan maka $\lim_{x \to 1} f(x)$ tidak ada

3.



4.3.2 Teorema limit utama

Andaikan n bilangan bulat positif, k konstanta, dan f dan g adalah fungsi-fungsi yang memunyai limit di c. Maka

1. $\lim_{x \to c} k = k$
2. $\lim_{x \to c} x = c$
3. $\lim_{x \to c} kf(x) = k \lim_{x \to c} f(x)$
4. $\lim_{x \to c} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x)$
5. $\lim_{x \to c} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) - \lim_{x \to c} g(x)$
6. $\lim_{x \to c} [f(x). g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) . \lim_{x \to c} g(x)$
7. $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$, asalkan $\lim_{x \to c} g(x) \neq 0$

8. $\lim_{x \to c} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to c} f(x)\right]^n$

9. $\lim_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to c} f(x)}$, asalkan $\lim_{x \to c} f(x) > 0$ bilamana n genap

Contoh:

Tentukan nilai dari:

$$\lim_{x\to 4}(3x^2 - 2x)$$

Jawab:

$$\lim_{x\to 4}(3x^2 - 2x) = \lim_{x\to 4} 3x^2 - \lim_{x\to 4} 2x = 3\lim_{x\to 4} x^2 - 2\lim_{x\to 4} x = 3\left(\lim_{x\to 4} x\right)^2 - 2\lim_{x\to 4} x = 3(4)^2 - 2.4$$
$$= 40$$

4.3.3 Teorema substitusi

Jika f suatu fungsi polinom atau fungsi rasional, maka

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$$

asalkan dalam kasus rasional nilai penyebut di c tidak nol.

Contoh:

Tentukan nilai dari:

$$\lim_{x\to 4}(3x^2 - 2x)$$

Jawab:

$$\lim_{x\to 4}(3x^2 - 2x) = 3(4)^2 - 2(4) = 40$$

4.3.4 Teorema Apit

Andaikan f, g, dan h adalah fungsi-fungsi yang memenuhi $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ untuk semua x dekat c, kecuali mungkin di c. Jika

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} h(x) = L$$

Maka

$$\lim_{x \to c} g(x) = L$$

Contoh:

Tentukan

$$\lim_{x \to 1} (x-1)^2 \sin\left(\frac{1}{x-1}\right)$$

Jawab:

$$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x-1}\right) \leq 1$$

$$-(x-1)^2 \leq (x-1)^2 \sin\left(\frac{1}{x-1}\right) \leq (x-1)^2$$

Karena

$$\lim_{x \to 1} -(x-1)^2 = 0$$

Dan

$$\lim_{x \to 1} (x-1)^2 = 0$$

Maka

$$\lim_{x \to 1} (x-1)^2 \sin\left(\frac{1}{x-1}\right) = 0$$

4.3.5 Kekontinuan di satu titik

Fungsi f dikatakan kontinu di titik $x = c$, jika

1. $f(c)$ ada
2. $\lim_{x \to c} f(x)$ ada
3. $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

Jika salah satu syarat tidak dipenuhi maka fungsi f dapat dikatakan tidak kontinu di $x = c$.

4.3.6 Teorema limit komposit

Jika $\lim_{x \to c} g(x) = L$ dan jika f kontinu di L, maka

$$\lim_{x \to c} f\big(g(x)\big) = f\left(\lim_{x \to c} g(x)\right) = f(L)$$

Khususnya, jika g kontinu di c dan f kontinu di $g(c)$, maka fungsi kompisit $f \circ g$ kontinu di c.

4.3.7 Kekontinuan pada selang

Fungsi f dikatakan **kontinu pada selang terbuka** (a, b) jika f kontinu di setiap titik (a, b). f **kontinu pada selang tertutup** $[a, b]$ jika kontinu pada (a, b), kontinu kanan di a dan kontinu kiri di b.

4.3.8 Teorema Nilai Antara

Jika f kontinu pada $[a, b]$ dan jika W sebuah bilangan antara $f(a)$ dan $f(b)$, maka terdapat sebuah bilangan c di antara a dan b sedemikian sehingga $f(c) = W$.

4.3.9 Limit tak hingga

Jika $\lim_{x \to c} f(x) = L, L \neq 0$ dan $\lim_{x \to c} g(x) = 0$ maka

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} =$$

1. $-\infty$, jika $L > 0$ dan $g(x)$ menuju 0 dari bawah (arah nilai $g(x)$ yang negatif)
2. ∞, jika $L > 0$ dan $g(x)$ menuju 0 dari atas (arah nilai $g(x)$ yang positif)
3. ∞, jika $L < 0$ dan $g(x)$ menuju 0 dari bawah (arah nilai $g(x)$ yang negatif)
4. $-\infty$, jika $L < 0$ dan $g(x)$ menuju 0 dari atas (arah nilai $g(x)$ yang positif)

Contoh:

Tentukan limit:

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 + 1}{x - 1} =$$

Jawab:

Jika disubstitusi langsung akan menghasilkan $\frac{2}{0}$, maka tidak dapat menggunakan teorema substitusi.

Maka

$$\lim_{x \to 1^-} x^2 + 1 = 2 > 0$$

$\lim_{x \to 1^-} x - 1$ menuju nol dari bawah. Oleh karena itu,

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 + 1}{x - 1} = -\infty$$

4.3.10 Limit di tak hingga

Tentukan nilai

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=$$

Jika f dan g adalah fungsi polinom.

Untuk menentukan nilai limit di atas perhatikan pangkat tertinggi fungsi f dan g :

1. Jika pangkat pembilang (fungsi f) lebih besar dibanding pangkat penyebut (fungsi g) maka nilainya ∞ atau $-\infty$.

   Contoh: Tentukan nilai

   $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4}{x-2}$$

   Jawab:

   $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to\infty}x+2=\infty$$

2. Jika pangkat pembilang (fungsi f) lebih kecil dibanding pangkat penyebut (fungsi g) maka nilainya 0.

   Contoh: Tentukan nilai

   $$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-4x+4}{x^4-3x}$$

   Jawab:

   $$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-4x+4}{x^4-3x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}{x^2\left(x^2-\frac{3}{x}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}}{x^2-\frac{3}{x}}=\frac{1}{\infty}=0$$

3. Jika pangkat pembilang (fungsi f) sama dengan pangkat penyebut (fungsi g) maka nilainya begantung dengan koefisien suku pangkat tertinggi.

Contoh: Tentukan nilai

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 1}$$

Jawab:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}\right)}{x^2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1} = 1$$

Latihan

1. Cari limit yang ditunjukkan

   a. $\lim\limits_{x \to 3} \left(\frac{2}{x} + 1\right)$ c. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2+6x-7}{x^2-1}$

   b. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2-2x-3}{x-3}$ d. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x}$

2. Carilah limit yang ditunjukkan atau nyatakan jika tidak ada.

   a. $\lim\limits_{u \to 1} \frac{u^2-1}{u+1}$ b. $\lim\limits_{z \to 2} \frac{z^2-4}{z^2+Z-6}$

3. Nyatakan apakah fungsi yang ditunjukkan kontinu atau tidak di 2: jika takkontinu jelaskan sebabnya

   a. $f(x) = 4x^2 - 2x + 12$ c. $f(x) = \frac{8}{x-2}$

   b. $h(t) = \begin{cases} \frac{4t-8}{t-2} & \text{jika } t \neq 2 \\ 2 & \text{jika } t = 2 \end{cases}$

4. Tentukan nilai a dan b sehingga fungsi berikut kontinu dimana-mana dan kemudian gambarkan grafik fungsi tersebut:

$$f(x) = \begin{cases} ax + 5 & x \leq 1 \\ 3x^2 + 1 & 1 < x \leq 5 \\ 3x - b & x < 5 \end{cases}$$