TEKNIK PENGINTEGRALAN

FUNGSI EKSPONENSIAL UMUM
PENGINTEGRALAN DENGAN SUBSTITUSI
INTEGRAL TRIGONOMETRI
SUBSTITUSI YANG MERASIONALKAN

Matematika Dasar

FUNGSI EKSPONEN UMUM

Fungsi $f(x) = a^x, a > 0$ disebut juga fungsi eksponen umum

$$D_x(a^x) = a^x \ln a$$

Jika $u = u(x)$, maka

$$D_x(a^u) = a^u u' \ln a$$

Contoh: Hitung turunan dari $f(x) = 5^{(2x^3+1)}$

$f'(x) = 5^{(2x^3+1)} \ln 5 \; D_x(2x^3+1) = 5^{(2x^3+1)} \ln 5 \,.\, 6x = 6x \; 5^{(2x^3+1)} \ln 5$

Latihan

1. $f(x) = 3^{\sqrt{x}}$
2. $f(x) = (x^4 + 2)^5 + 5^{x^4+2}$
3. $f(x) = 3^{2x+1} + 2^{\sin 2x}$

TEKNIK PENGINTEGRALAN

Beberapa sifat pengintegralan

$$\int k\, du = ku + C$$

$$\int u^r\, du = \begin{cases} \frac{u^{r+1}}{r+1} + C & r \neq -1 \\ \ln|u| & r = -1 \end{cases}$$

$$\int e^u\, du = e^u + C$$

$$\int a^u\, du = \frac{a^u}{\ln a} + C, a \neq 1, a > 0$$

Contoh

$$\int 3^u du = \frac{3^u}{\ln 3} + C$$

Latihan

Tentukan $\int g(a)da$ untuk fungsi $g(a)$ berikut ini

1. $g(a) = \frac{5}{a^5} - \frac{3}{a^3}$
2. $g(a) = \frac{2a^5 - 3a^4 + 4a^3}{2a^4}$
3. $g(a) = \frac{3a}{a^2 + 10}$
4. $\int x2^{x^2}\, dx =$

INTEGRAL TRIGONOMETRI

$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$

$\int \cos x \, dx = \sin x + C$

$\int \sin^{\mathrm{n}} x \, dx$ dan $\int \cos^{\mathrm{n}} x \, dx$

Jika (n ganjil)

Contoh:

Tentukan $\int \sin^5 x \, dx$

Sifat Trigonometri

1. $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
2. $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$
3. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
4. $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$
5. $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$
6. $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$
7. $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$

Jawab:

$\int \sin^5 x \, dx = \int \sin^4 x \sin x \, dx = \int (1 - \cos^2 x)^2 \sin x \, dx = \int (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x) \sin x \, dx$

Misal: $u = \cos x$ maka $du = -\sin x \, dx$

Diselesaikan

INTEGRAL TRIGONOMETRI

Sifat Trigonometri

1. $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
2. $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$
3. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
4. $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$
5. $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

Jika (n genap)

Contoh: Tentukan $\int \cos^4 x \, dx$

Jawab:

$$\int \cos^4 x \, dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x)\, dx$$

Diselesaikan

INTEGRAL TRIGONOMETRI

$\int \sin mx \cos nx \, dx$, $\int \sin mx \sin nx \, dx$, $\int \cos mx \cos nx \, dx$

Ingat kesamaan: $\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x]$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]$$

$$\sin mx \sin nx = -\frac{1}{2}[\cos(m+n)x - \cos(m-n)x]$$

Contoh: Tentukan $\int \sin 4x \cos 5x \, dx$

$$\int \sin 4x \cos 5x \, dx = \frac{1}{2}\int (\sin(4x+5x) + \sin(4x-5x)) \, dx$$

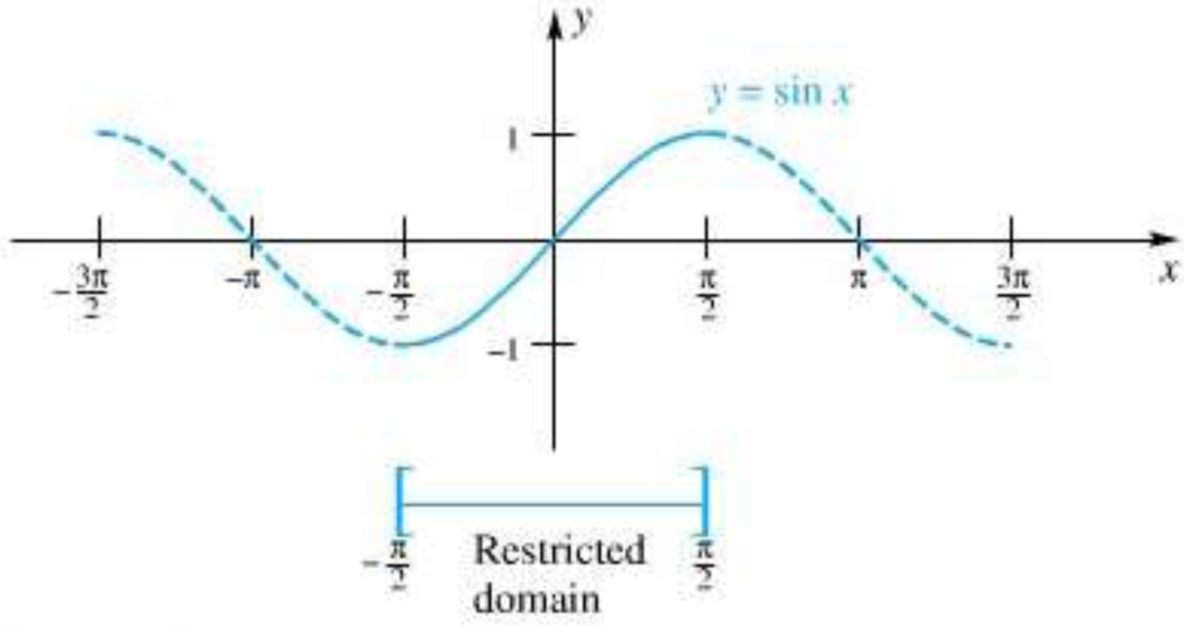
Selesaikan

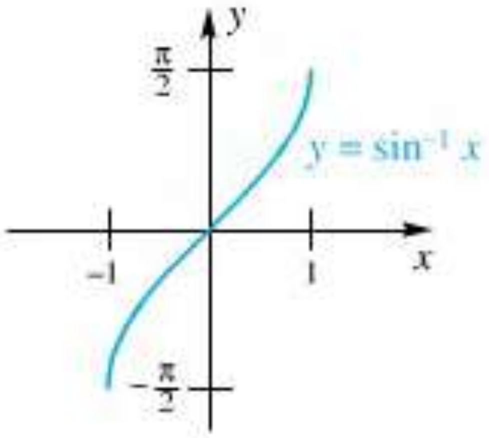
LATIHAN

Tentukan integral dari fungsi trigonometri berikut ini

1. $h(x) = 3\sin x - 2\cos x$
2. $k(a) = \sin(3x)\cos(3a)$
3. $f(x) = x(\cos^4 x^2)(\sin x^2)$
4. $f(x) = \cos(6x)\sin(4x)$
5. $g(b) = \sin^4 3b$
6. $l(x) = \cos^3 x$

INVERS TRIGONOMETRI





$y = \sin x$ fungsi inversnya adalah $y = \sin^{-1} x$

Tentukan nilai berikut ini

a. $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$ b. $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) =$ c. $\cos(\cos^{-1} 0{,}6) =$

INVERS TRIGONOMETRI

$y = \sin^{-1} x \to y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ , -1 < x < 1$	$\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sin^{-1} x + C$
$y = \cos x \to y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, -1 < x < 1$	$\displaystyle\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \cos^{-1} x + C$
$y = \tan^{-1} x \to y' = \dfrac{1}{1+x^2}$	$\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \tan^{-1} x + C$
$y = \sec^{-1} x \to y' = \dfrac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}, \lvert \boldsymbol{x} \rvert > \mathbf{1}$	$\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx = \sec^{-1}\lvert x\rvert + C$

LATIHAN

Tentukan turunan dari fungsi berikut ini

1. $f(x) = \cos^{-1}(2x^2)$
2. $f(x) = \sin^{-1}(3x - 1)$
3. $f(x) = (\tan^{-1}x)^3$
4. $f(x) = \sec^{-1}(x)^3$

Tentukan integral dari fungsi berikut ini

1. $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx =$
2. $\int \frac{3}{\sqrt{5-9x^2}}dx =$
3. $\int \frac{e^x}{4+9e^{2x}}dx =$
4. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-9}}dx =$

SUBSTITUSI YANG MERASIONALKAN

Integran yang memuat $\sqrt[n]{ax+b}$

Apabila di dalam integran ada bentuk $\sqrt[n]{ax+b}$ substitusi $u=\sqrt[n]{ax+b}$, dapat merasionalkan integran.

Contoh:

Tentukan $\int \frac{tdt}{\sqrt{2t+7}}$

Jawab:$\int \frac{tdt}{\sqrt{2t+7}}$

Misal $u=\sqrt{2t+7} \leftrightarrow u^2=2t+7 \leftrightarrow 2udu=2dt$ dan $t=\frac{u^2-7}{2}$

Diselesaikan

SUBSTITUSI YANG MERASIONALKAN

Integran yang mengandung $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$, dan $\sqrt{x^2 - a^2}$, untuk merasionalkan bentuk akar-akar tersebut kita gunakan masing-masing subsitusi berikut:

$x = a \sin t$

$x = a \tan t$

$x = a \sec t$

Untuk melihat akibat subtitusi tersebut, perhatikanlah bahwa:

$a^2 - x^2 = a^2 - a^2 \sin^2 t = a^2(1 - \sin^2 t) = a^2 \cos^2 t$

$a^2 + x^2 = a^2 - a^2 \tan^2 t = a^2(1 + \tan^2 t) = a^2 \sec^2 t$

$x^2 - a^2 = a^2 \sec^2 t - a^2 -= a^2(\sec^2 t - 1) = a^2 \tan^2 t$

SUBSTITUSI YANG MERASIONALKAN

Apabila daerah asal dibatasi sedemikian rupa sehingga substitusi (1), (2), dan (3) memiliki invers, maka

$\sqrt{a^2 - x^2} = a|\cos t| = a\cos t$(sebab $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$)

$\sqrt{a^2 + x^2} = a|\sec t| = a\sec t$(sebab $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$)

$\sqrt{a^2 - x^2} = a|\cos t| = a\cos t$(sebab $0 \le t \le \pi, t \ne \frac{\pi}{2}$)

Contoh Tentukan $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$

Jawab: Kita gunakan substitusi $x = a \sin t$,

SUBSTITUSI YANG MERASIONALKAN

Contoh Tentukan $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$

Jawab: Kita gunakan substitusi $x = a \sin t$,

Maka $dx = a \cos t\, dt$ dan $\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos t$. Sehingga

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \int a \cos t \cdot a \cos t\, dt = a^2 \int \cos^2 t\, dt$$

$$= \frac{a^2}{2} \int (1 + \cos 2t)\, dt = \frac{a^2}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) + C$$

$$= \frac{a^2}{2} (t + \sin t \cos t) + C$$

SUBSTITUSI YANG MERASIONALKAN

Oleh karena $x = a \sin t$ ekivalen dengan ${}^{x}/_{a} = \sin t$ dan oleh karena selang t dibatasi sehingga sinus memiliki invers, maka

$$t = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$

Juga dengan sebuah kesamaan yaitu

$$\cos t = \sqrt{1 - sin^2 t} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

Maka

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{a^2}{2}(t + \sin t \cos t) + C = \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C$$

LATIHAN

1. $\int x\sqrt{x-1}dx$
2. $\int x^3\sqrt{x-4}\,dx$
3. $\int \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}}dx$
4. $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}dx$
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+26}}$