APLIKASI INTEGRAL

Kalkulus 2

Penerapan Integral

APLIKASI INTEGRAL

- kelengkungan
- Luas daerah

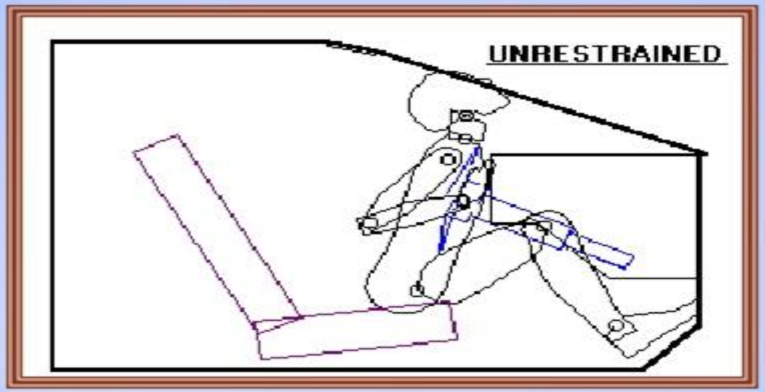
Contoh Penerapan Integral

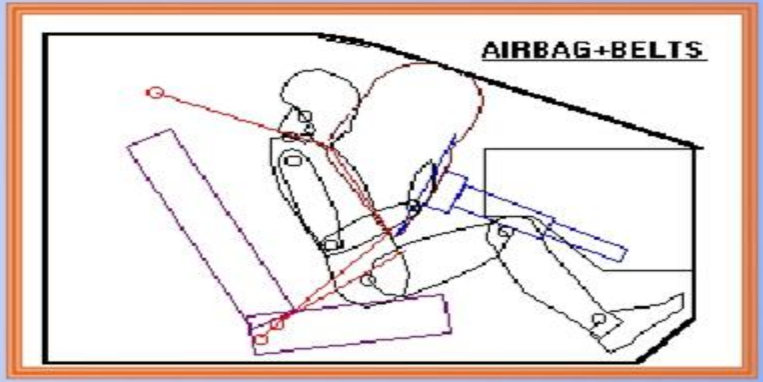
- Integral digunakan pada design **Menara Petronas** di Kuala lumpur, untuk perhitungan kekuatan menara.

- **Sydney Opera House** di design berdasarkan irisan-irisan bola. Banyak persamaan diferensial diselesaikan (dalam menyelesaikannya menggunakan integral) pada design gedung tsb

CRASH TESTS

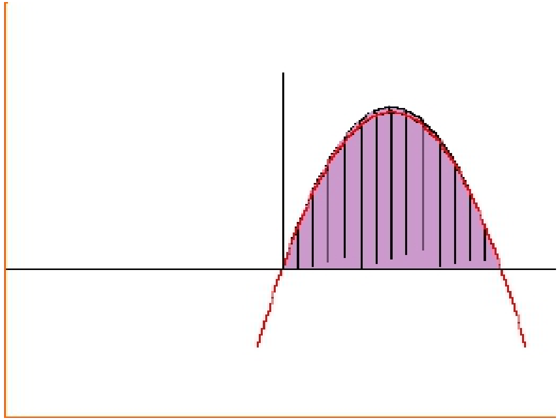
- Pada saat terjadi kecelakaan mobil, bagian tubuh yang beresiko tinggi untuk terluka yg menyebabkan kematian adalah kepala. Karena itu, di dalam mobil perlu dipasang alat-alat pengaman seperti sabuk pengaman dan airbag.



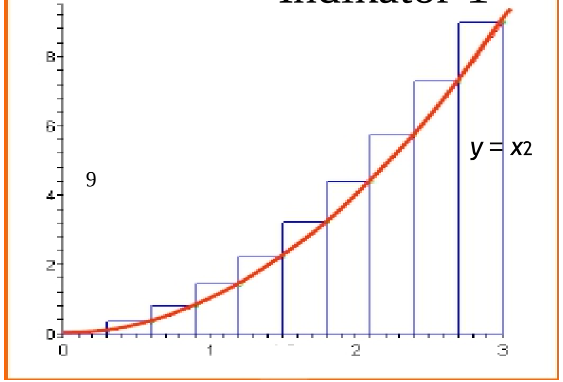


PENERAPAN INTEGRAL

Indikator 2



Indikator 1



Luas daerah di bawah

Kurva

$y = x^2$ berdasarkan prinsip Riemaan

Volume benda putar, jika kurva $y = -x \;\; +4x$ diputar mengelilingi sumbu Y

Teorema Dasar Kalkulus

Misalkan f adalah fungsi yang kontinyu pada selang [a, b] dan misalkan F adalah anti turunan dari f pada selang tersebut, maka berlaku : $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

Untuk meringkas penulisan, F(b) - F(a) dinotasikan sebagai $\left[F(x)\right]_a^b$

Contoh 1 :

Hitunglah nilai dari $\int_{-1}^{2} \left(6x^2 - 4x\right)dx$

Jawab

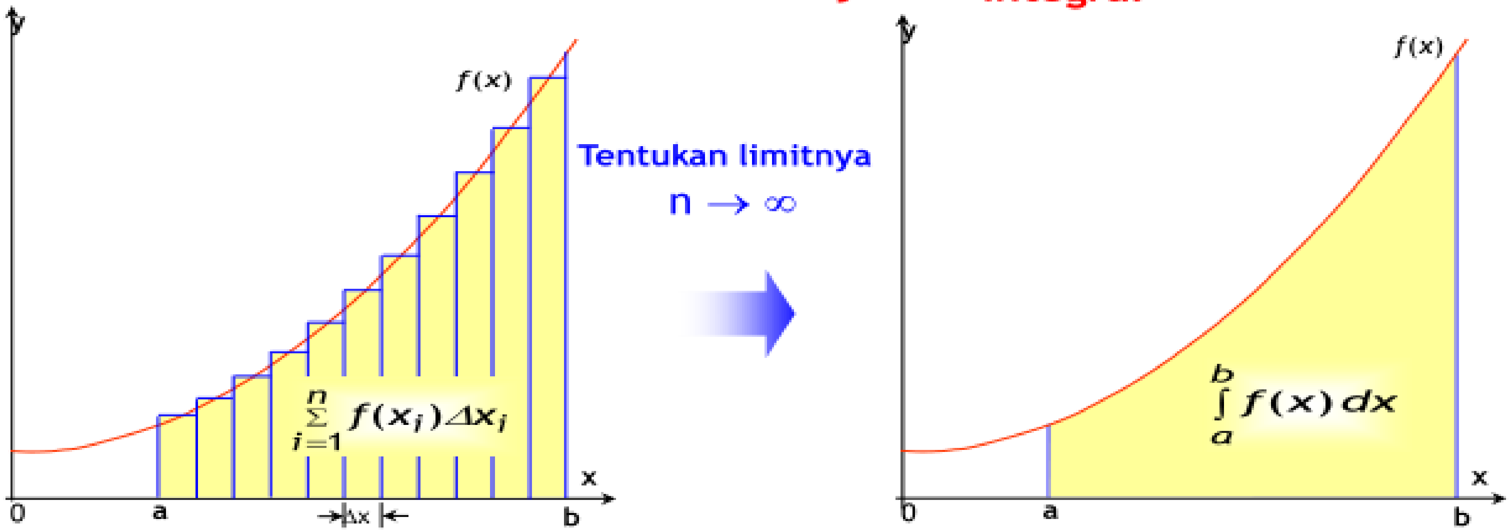
$$\int_{-1}^{2} \left(6x^2 - 4x\right)dx = \left[2x^3 - 2x^2\right]_{-1}^{2}$$

$$= 2(2)^3 - 2(2)^2 - [2(-1)^3 - 2(-1)^2]$$

$$= 16 - 8 + 2 + 2 = 12$$

Secara geometri definisi integral Riemaan di atas dapat diartikan sebagai luas daerah di bawah kurva $y = f(x)$ pada interval [a, b].

Jumlah Luas Partisi Berubah Menjadi Integral



$$L = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

Kegiatan pokok dalam menghitung luas daerah dengan integral tentu adalah:

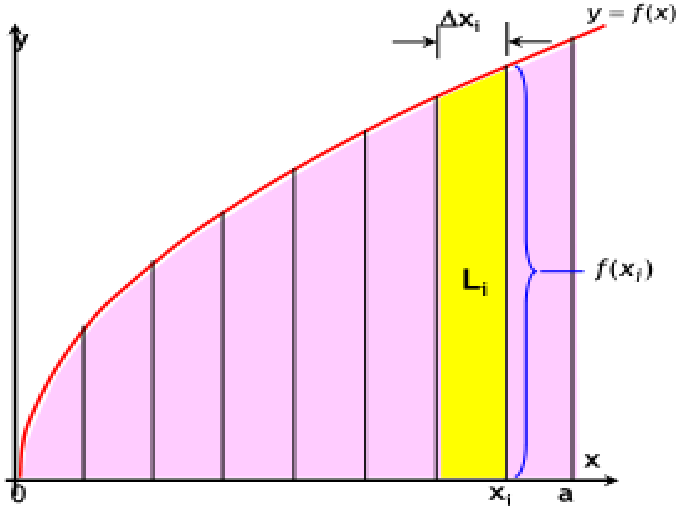
1. Gambar daerahnya.
2. Partisi daerahnya
3. Aproksimasi luas sebuah partisi

   $L_i \approx f(x_i)\, \Delta x_i$

4. Jumlahkan luas partisi

   $L \approx \sum f(x_i)\, \Delta x_i$

5. Ambil limitnya $L = \lim \sum f(x_i)\, \Delta x_i$
6. Nyatakan dalam integral $\boxed{L = \int_0^a f(x)\, dx}$



Contoh 1.

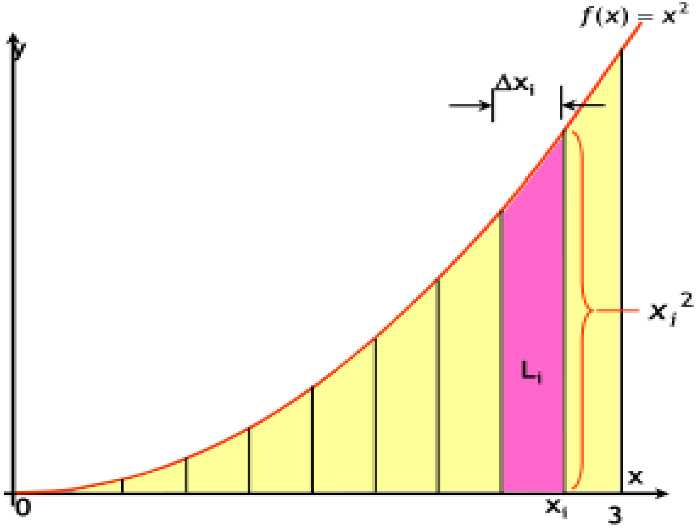
Hitunglah luas daerah tertutup yang dibatasi kurva $y = x^2$, sumbu x, dan garis $x = 3$

Jawab

Langkah penyelesaian :

1. Gambarlah daerahnya
2. Partisi daerahnya
3. Aproksimasi luasnya $L_i \approx x_i^2 \Delta x_i$
4. Jumlahkan luasnya $L \approx \sum x_i^2 \Delta x_i$
5. Ambil limit jumlah luasnya

   $L = \lim \sum x_i^2 \Delta x_i$
6. Nyatakan dalam integral dan hitung nilainya $L = \int_0^3 x^2\,dx$

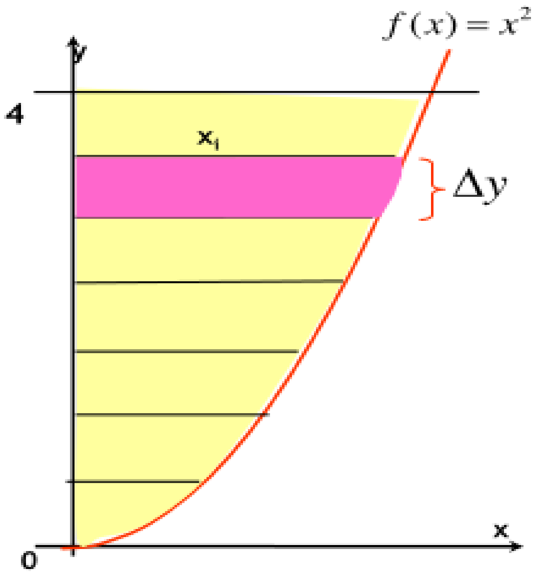


$$L = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \frac{3^3}{3} - 0 = 9$$

Contoh 2.

Hitunglah luas daerah tertutup yang dibatasi kurva $y = x^2$, sumbu Y, dan garis $y = 4$

Jawab



Langkah penyelesaian :

1. Gambarlah daerahnya
2. Partisi daerahnya
3. Aproksimasi luasnya $L \approx x_i . \Delta y$
4. Jumlahkan luasnya $L \approx \sum \sqrt{y} . \Delta y$
5. Ambil limit jumlah luasnya

   $L = \lim \sum \sqrt{y} . \Delta y$
6. Nyatakan dalam integral dan hitung nilainya $L = \int_0^4 \sqrt{y} . dy$

$$L = \left[\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} \right]_0^4 = \frac{2}{3} .8 = \frac{16}{3}$$

Contoh 3.

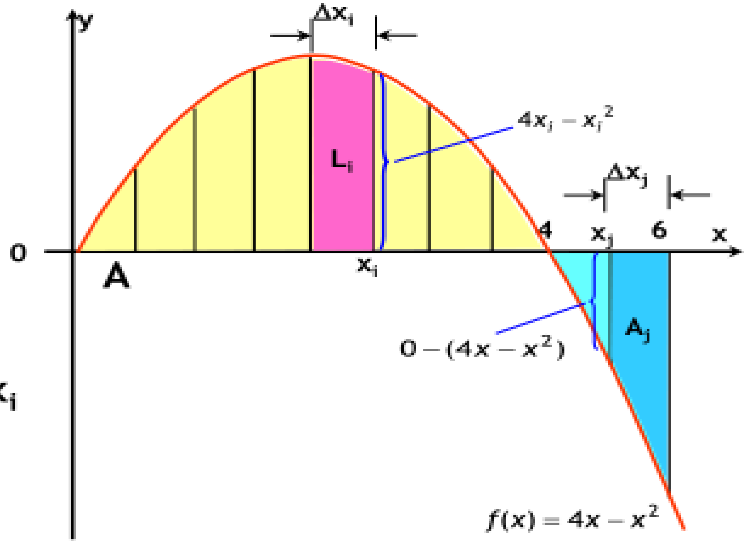
Hitunglah luas daerah tertutup yang dibatasi kurva $y = 4x - x^2$, sumbu x, dan garis $x = 6$

Jawab

Langkah penyelesaian:

1. Gambar dan Partisi daerahnya
2. Aproksimasi : $L_i \approx (4x_i - x_i^2)\Delta x_i$ dan $A_j \approx -(4x_j - x_j^2)\Delta x_j$
3. Jumlahkan : $L \approx \sum(4x_i - x_i^2)\Delta x_i$ dan $\approx \sum -(4x_j - x_j^2)\Delta x_j$
4. Ambil limitnya $L = \lim \sum (4x_i - x_i^2)\Delta x_i$ dan $A = \lim \sum -(4x_j - x_j^2)\Delta x_j$
5. Nyatakan dalam integral

$$L = \int_0^4 (4x - x^2)\,dx \quad A = \int_4^6 -(4x - x^2)\,dx$$



$$L = \int_0^4 (4x - x^2)\,dx$$

$$L = \left[2x^2 - \tfrac{1}{3}x^3\right]_0^4$$

$$L = 2(4)^2 - \tfrac{1}{3}(4)^3 - 0 = 32 - \tfrac{64}{3}$$

$$A = \int_4^6 -(4x - x^2)\,dx$$

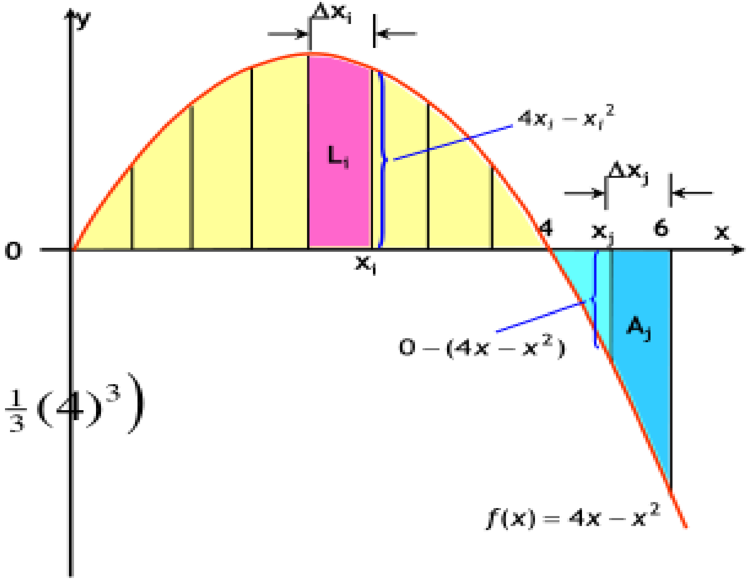
$$A = \left[-2x^2 + \tfrac{1}{3}x^3\right]_4^6$$

$$A = -2(6)^2 + \tfrac{1}{3}(6)^3 - \left(-2(4)^2 + \tfrac{1}{3}(4)^3\right)$$

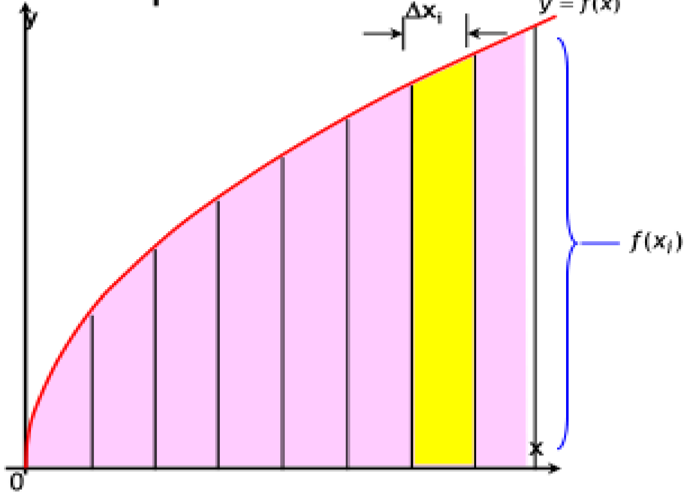
$$A = -72 + \tfrac{216}{3} + 32 - \tfrac{64}{3}$$

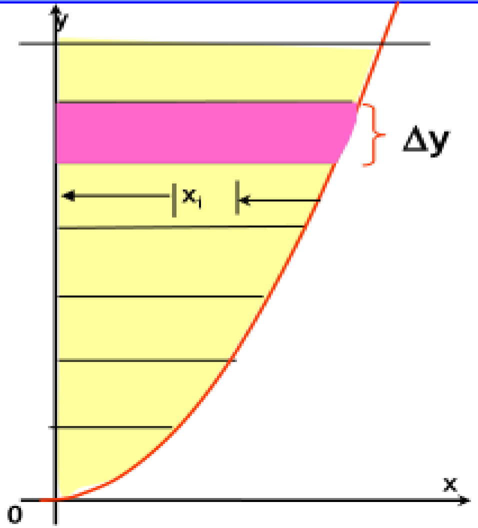
$$A = \tfrac{152}{3} - 40$$

$$\text{Luas daerah} = 32 - \tfrac{64}{3} + \tfrac{152}{3} - 40 = 21\frac{1}{3}$$



Kesimpulan :





$$L = \int_a^b y.dx$$

$$L = \int_a^b x.dy$$

LUAS DAERAH ANTARA DUA KURVA

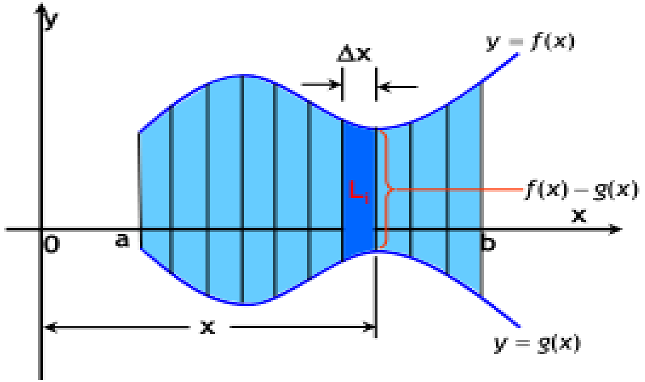
Perhatikan kurva y = $f(x)$ dan $y = g(x)$ dengan $f(x) > g(x)$ pada selang [a, b] di bawah ini. Dengan menggunakan cara : *partisi*, *aproksimasi*, *jumlahkan*, *ambil limitnya*, *integralkan*, maka dapat ditentukan luas daerah antara dua kurva tersebut.

Langkah penyelesaian:

1. Partisi daerahnya
2. Aproksimasi : $L_i \approx [\, f(x) - g(x)\,]\, \Delta x$
4. Jumlahkan : $L \approx \sum [\, f(x) - g(x)\,]\, \Delta x$
5. Ambil limitnya :

   $L = \lim \sum [\, f(x) - g(x)\,]\, \Delta x$
6. Nyatakan dalam integral tertentu

$$\boxed{L = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx}$$



Menghitung Luas dengan Integral — Luas Daerah

Contoh 4.

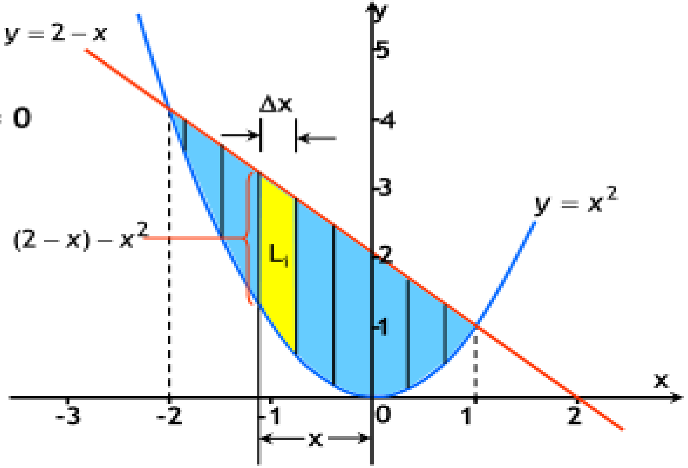
Hitunglah luas daerah tertutup yang dibatasi kurva $y = x^2$ dan garis $y = 2 - x$

Jawab

Langkah penyelesaian:

1. Gambar daerahnya
2. Tentukan titik potong kedua kurva
   $x^2 = 2 - x \rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow (x + 2)(x - 1) = 0$
   diperoleh $x = -2$ dan $x = 1$
3. Partisi daerahnya
4. Aproksimasi luasnya
   $L_i \approx (2 - x - x^2)\Delta x$
5. Nyatakan dalam integral tertentu

$$L = \int_{-2}^{1} (2 - x - x^2)\,dx$$



$$L = \int_{-2}^{1} (2 - x - x^2)\, dx$$

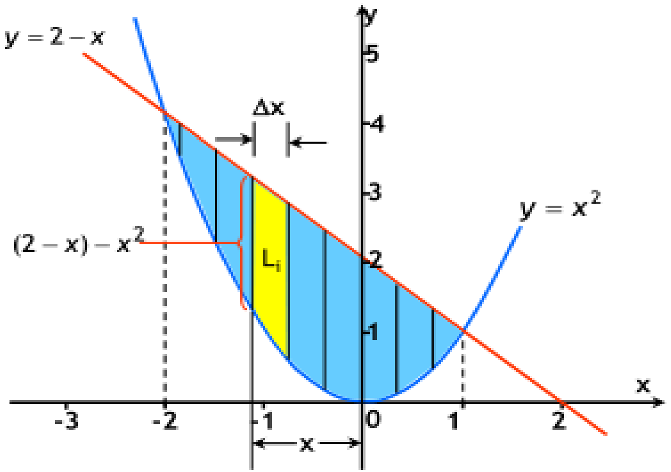
$$L = \left[2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{1}$$

$$L = \left(2(1) - \frac{1^2}{2} - \frac{1^3}{3}\right) - \left(2(-2) - \frac{(-2)^2}{2} - \frac{(-2)^3}{3}\right)$$

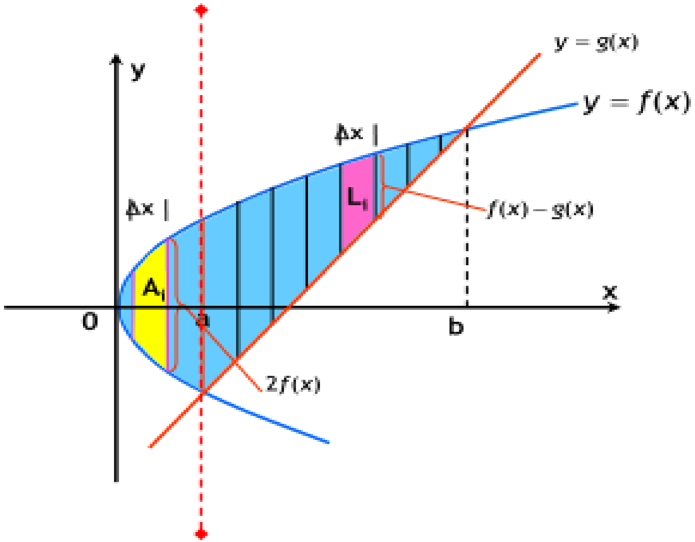
$$L = \left(2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(-4 - 2 + \frac{8}{3}\right)$$

$$L = 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 4 + 2 - \frac{8}{3}$$

$$L = 5 - \frac{1}{2} = 4\frac{1}{2}$$

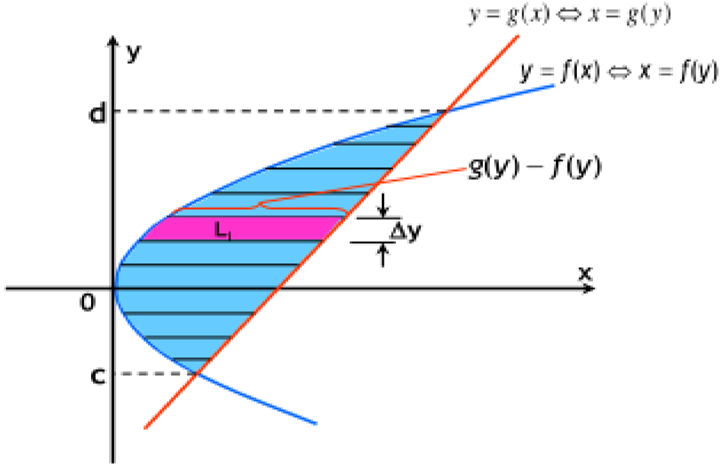


Untuk kasus tertentu pemartisian secara vertikal menyebabkan ada dua bentuk integral. Akibatnya diperlukan waktu lebih lama untuk menghitungnya.



Luas daerah = $\int_{0}^{a} 2f(x)\,dx + \int_{a}^{b} (f(x) - g(x))\,dx$

Jika daerah tersebut dipartisi secara horisontal, maka akan diperoleh satu bentuk integral yang menyatakan luas daerah tersebut. Sehingga penyelesaiannya menjadi lebih sederhana dari sebelumnya.



$$\text{Luas daerah} = \int_c^d (g(y) - f(y))dy$$

Contoh 5.

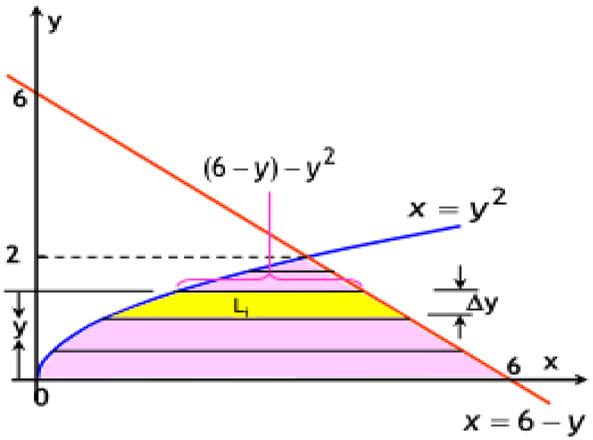
Hitunglah luas daerah di kuadran I yang dibatasi kurva $y^2 = x$, garis $x + y = 6$, dan sumbu x

Jawab

Langkah penyelesaian:

1. Gambar daerahnya
2. Tentukan titik potong kedua kurva
   $y^2 = 6 - y \rightarrow y^2 + y - 6 = 0 \rightarrow (y + 3)(y - 2) = 0$
   diperoleh $y = -3$ dan $y = 2$
3. Partisi daerahnya
4. Aproksimasi luasnya
   $L_i \approx (6 - y - y^2)\Delta y$
5. Nyatakan dalam integral tertentu

$$\text{Luas daerah} = \int_0^2 \left(6 - y - y^2\right) dy$$



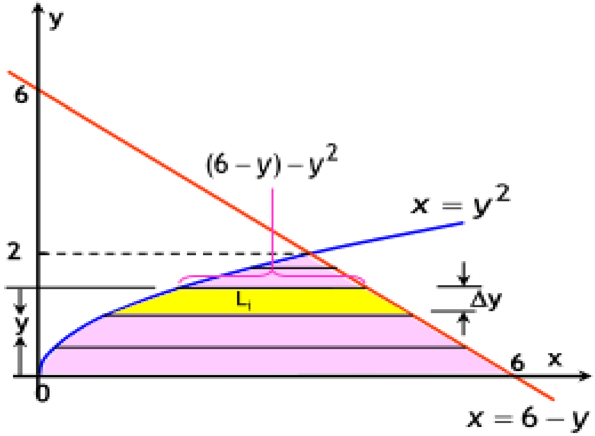
Luas daerah = $\int_0^2 \left(6 - y - y^2\right) dy$

Luas daerah = $\left[6y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^2$

Luas daerah = $\left(6(2) - \frac{4}{2} - \frac{2^3}{3}\right) - 0$

Luas daerah = $\left(12 - 2 - \frac{8}{3}\right)$

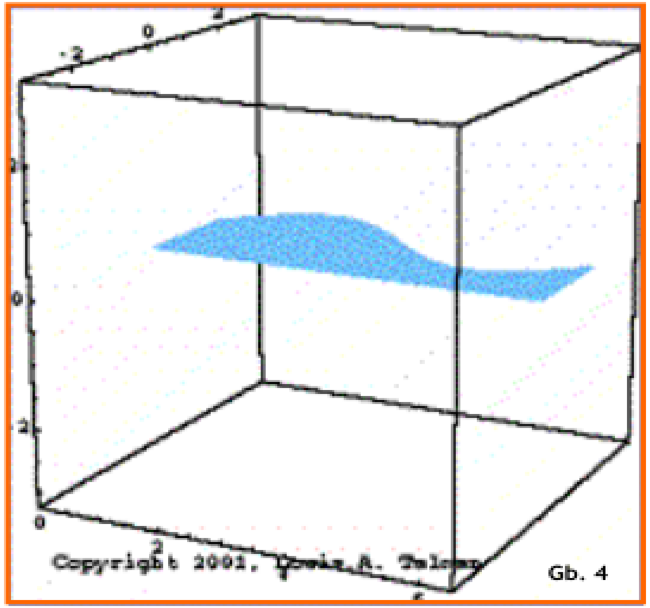
Luas daerah = $\frac{22}{3}$



Penerapan Integral

Volume Benda Putar

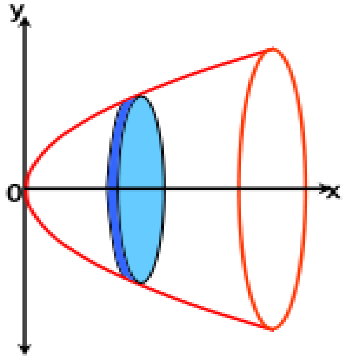
Suatu daerah jika di putar mengelilingi garis tertentu sejauh 360°, maka akan terbentuk suatu benda putar. Kegiatan pokok dalam menghitung volume benda putar dengan integral adalah: *partisi*, *aproksimasi*, *penjumlahan*, *pengambilan limit, dan menyatakan dalam integral tentu.*

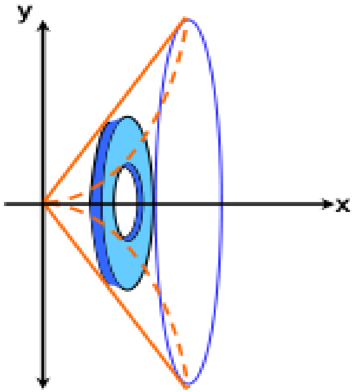


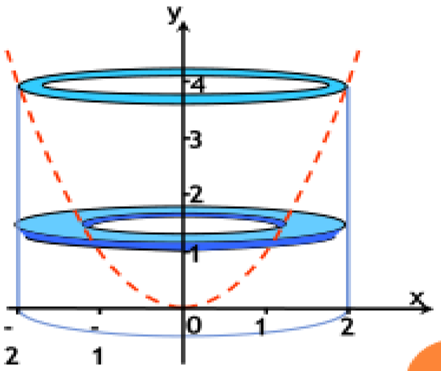
Gb. 4

Dalam menentukan volume benda putar yang harus diperhatikan adalah bagaimana bentuk sebuah partisi jika diputar. Berdasarkan bentuk partisi tersebut, maka metode yang digunakan untuk menentukan volume benda putar dibagi menjadi :

1. Metode cakram
2. Metode cincin
3. Metode kulit tabung







PERLU DI INGAT !!!!!

- **RUMUS DASAR TABUNG :**

>> LUAS PERMUKAAN TABUNG

L = 2 x π x jari-jari x tinggi

$$\mathbf{L = 2 \pi r t}$$

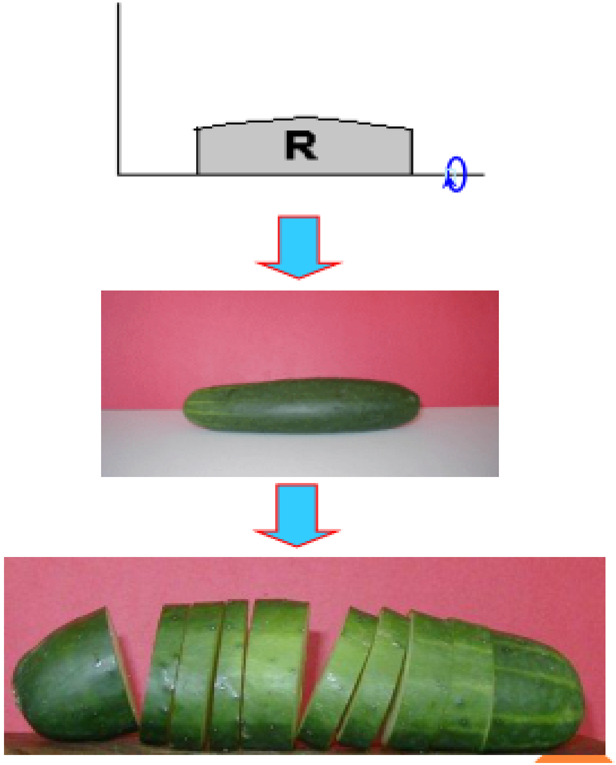
>> VOLUME TABUNG

V = luas alas x tinggi

V = π x (jari-jari)^2 x tinggi

$$\mathbf{V = \pi r^2 t}$$

Metode cakram yang digunakan dalam menentukan volume benda putar dapat dianalogikan seperti menentukan volume mentimun dengan memotong-motongnya sehingga tiap potongan berbentuk cakram.



Bentuk cakram di samping dapat dianggap sebagai tabung dengan jari-jari $r = f(x)$, tinggi $h = \Delta x$. Sehingga volumenya dapat diaproksimasi sebagai $\Delta V \approx \pi r^2 h$ atau $\Delta V \approx \pi\, f(x)^2 \Delta x$.

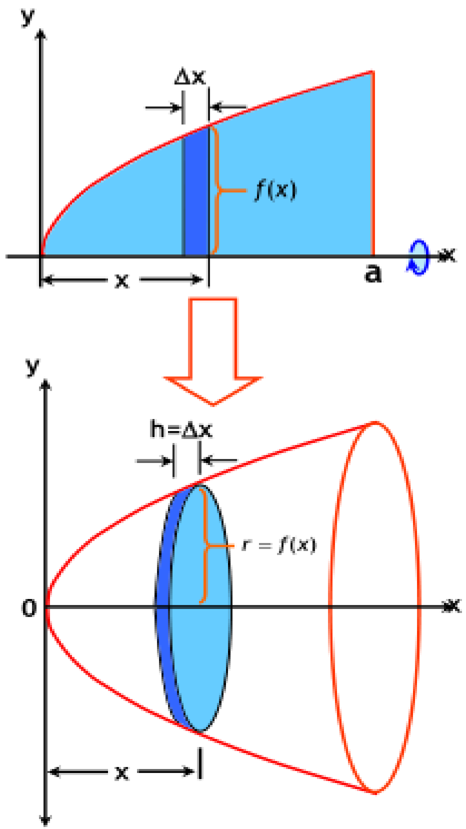
Dengan cara jumlahkan, ambil limitnya, dan nyatakan dalam integral diperoleh:

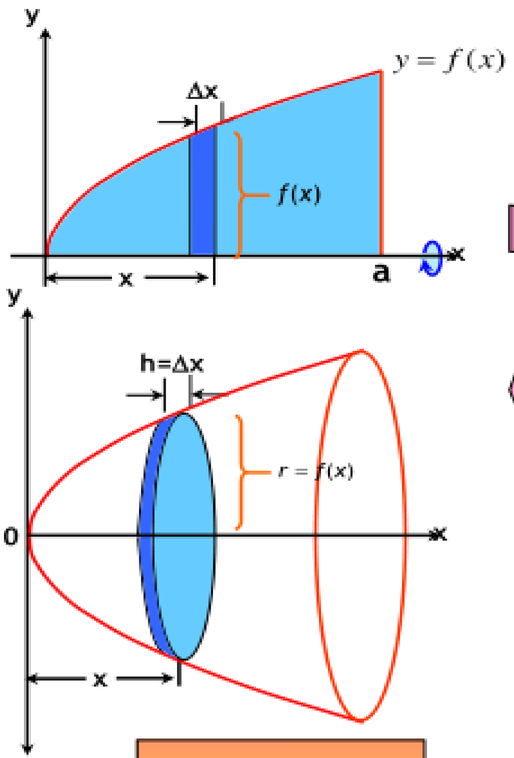
$$V \approx \sum \pi\, f(x)^2\, \Delta x$$

$$V = \lim \sum \pi\, f(x)^2\, \Delta x$$

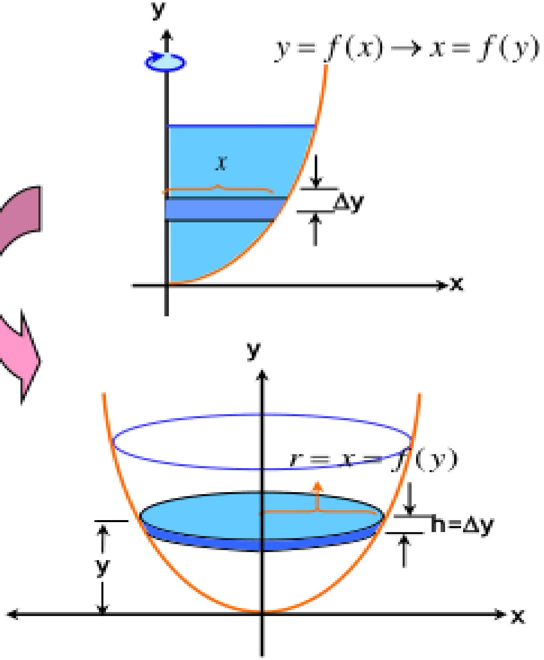
$$V = \pi \int_0^a [f(x)]^2 dx$$

$$\boxed{V = \pi \int_0^a y^2 dx}$$





$$V = \pi \int_0^a y^2 . dx$$



$$V = \pi \int_0^a x^2 \, dy$$

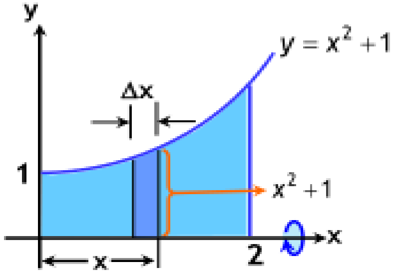
Contoh 6.

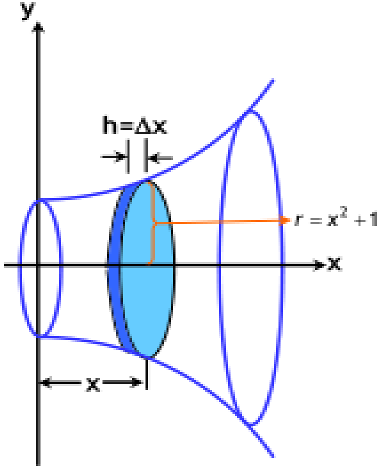
Hitunglah volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi kurva $y = x^2 + 1$, sumbu x, sumbu y, garis $x = 2$ diputar mengelilingi sumbu x sejauh 360°.

Jawab

Langkah penyelesaian:

1. Gambarlah daerahnya
2. Buat sebuah partisi
3. Tentukan ukuran dan bentuk partisi
4. Nyatakan dalam bentuk integral.





$$V = \pi \int_0^2 y^2 \, dx$$

$$V = \pi \int_0^2 (x^2 + 1)^2 dx$$

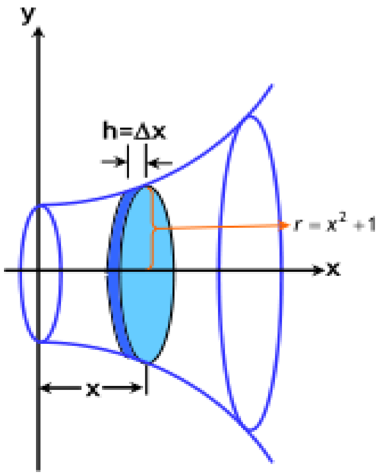
$$V = \pi \int_0^2 y^2 \, dx$$

$$V = \pi \int_0^2 (x^2 + 1)^2 dx$$

$$V = \pi \int_0^2 (x^4 + 2x^2 + 1) \, dx$$

$$V = \pi \left[\frac{1}{5} x^5 + \frac{2}{3} x^3 + x \right]_0^2$$

$$V = \pi \left(\frac{32}{5} + \frac{16}{3} + 2 - 0 \right) = 13\frac{11}{15}\pi$$



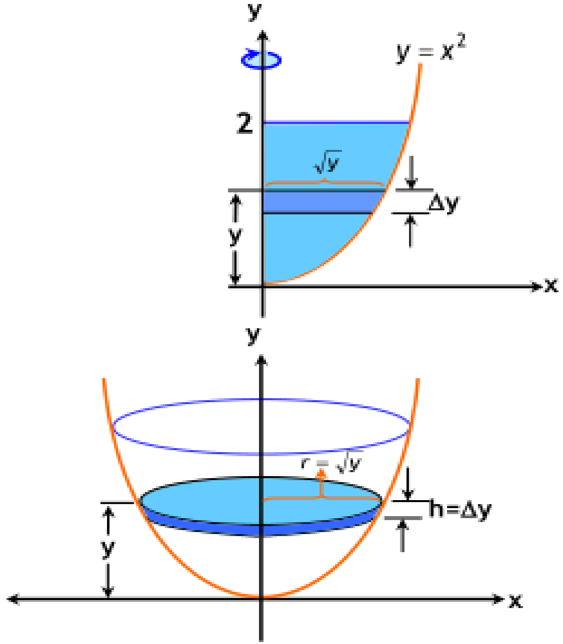
Contoh 7.

Hitunglah volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi kurva $y = x^2$, sumbu y, garis $y = 2$ diputar mengelilingi sumbu y sejauh 360°.

Jawab

Langkah penyelesaian:

1. Gambarlah daerahnya
2. Buatlah sebuah partisi
3. Tentukan ukuran dan bentuk partisi
4. Aproksimasi volume partisi yang diputar, jumlahkan, ambil limitnya, dan nyatakan dalam bentuk integral.



$$V = \pi\int_0^2 x^2\,dy$$

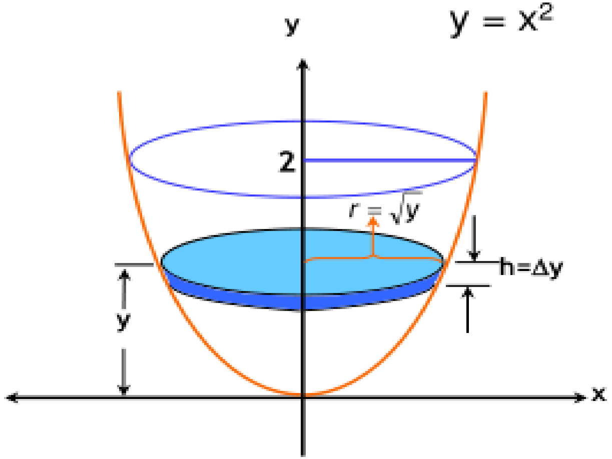
$$V = \pi\int_0^2 y\,dy$$

$$V = \pi\int_0^2 y\,dy$$

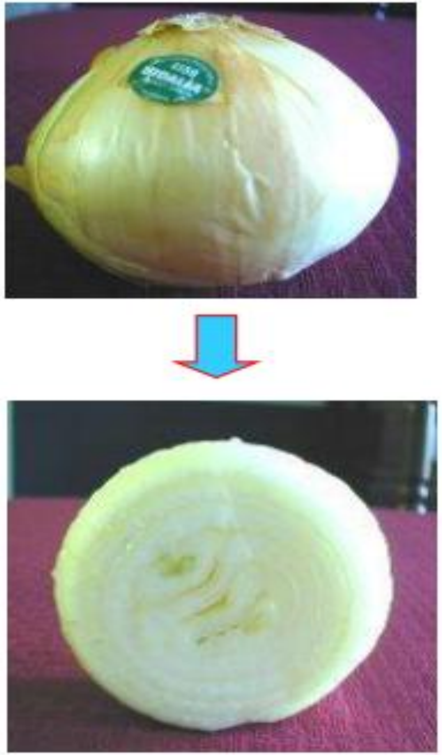
$$V = \pi\left[\tfrac{1}{2}y^2\right]_0^2$$

$$V = \pi\left(\tfrac{1}{2}\times 4 - 0\right)$$

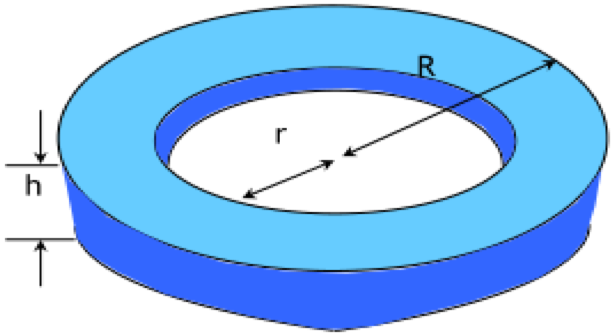
$$V = 2\pi$$



Metode cincin yang digunakan dalam menentukan volume benda putar dapat dianalogikan seperti menentukan volume bawang bombay dengan memotong-motongnya yang potongannya berbentuk cincin.



Menghitung volume benda putar dengan menggunakan metode cincin dilakukan dengan memanfaatkan rumus volume cincin seperti gambar di samping, yaitu $V = \pi(R^2 - r^2)h$



$$V = \pi\int_a^b \left(y_1^{\,2} - y_2^{\,2}\right)dx$$

dan

$$V = \pi\int_a^b \left(x_1^{\,2} - x_2^{\,2}\right)dy$$

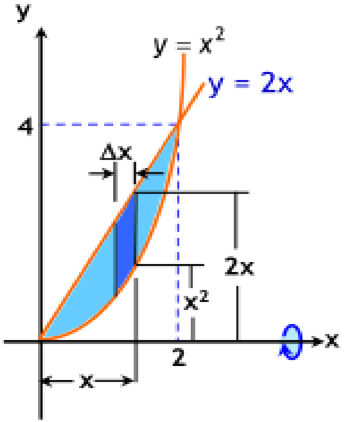
Contoh 8.

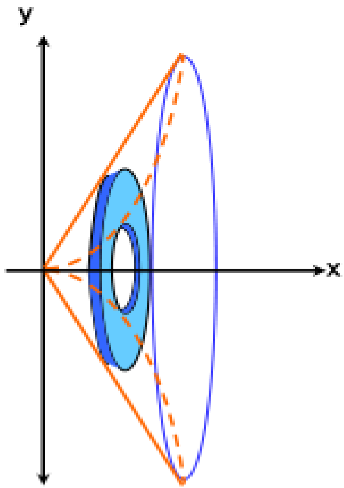
Hitunglah volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi kurva $y = x^2$ dan garis $y = 2x$ diputar mengelilingi sumbu x sejauh 360°.

Jawab

Langkah penyelesaian:

1. Gambarlah daerahnya
2. Buat sebuah partisi
3. Tentukan ukuran dan bentuk partisi
4. Aproksimasi volume partisi yang diputar, jumlahkan, ambil limitnya, dan nyatakan dalam bentuk integral.





$\Delta V \approx \pi(R^2 - r^2)\ h$

$\Delta V \approx \pi\ [\ (2x)^2 - (x^2)^2\ ]\ \Delta x$

$$V = \pi\int_0^2 (y_1^{\ 2} - y_2^{\ 2})\, dx$$

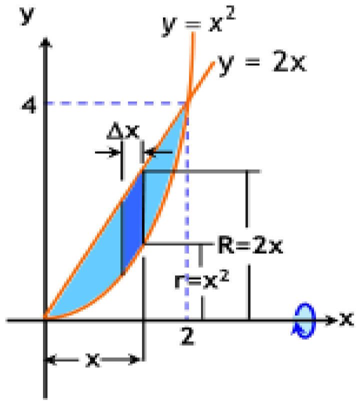
$$V = \pi\int_0^2 (4x^2 - x^4)\, dx$$

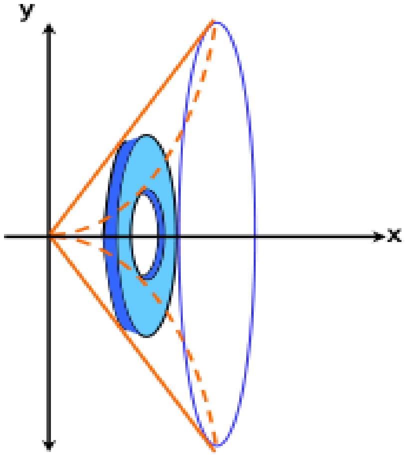
$$V = \pi\left[\frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\right]_0^2$$

$$V = \pi\left(\frac{32}{3} - \frac{32}{5}\right)$$

$$V = \pi\left(\frac{160 - 96}{15}\right)$$

$$V = \frac{64}{15}\pi$$





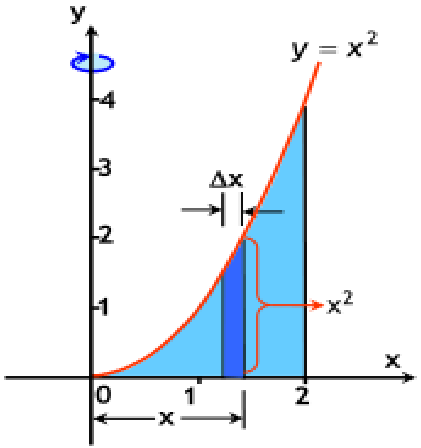
Contoh 9.

Hitunglah volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi kurva $y = x^2$, garis $x = 2$, dan sumbu x diputar mengelilingi sumbu y sejauh 360°.

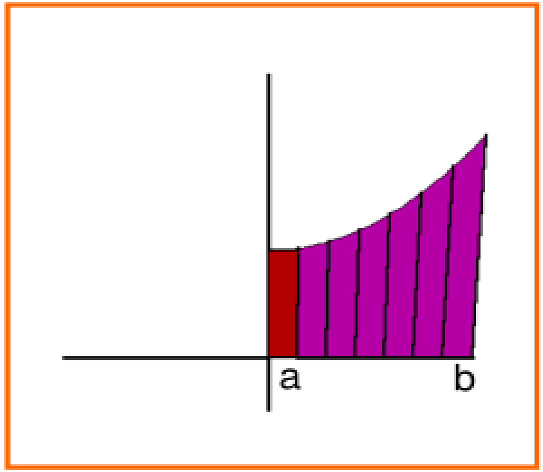
Jawab

Langkah penyelesaian:

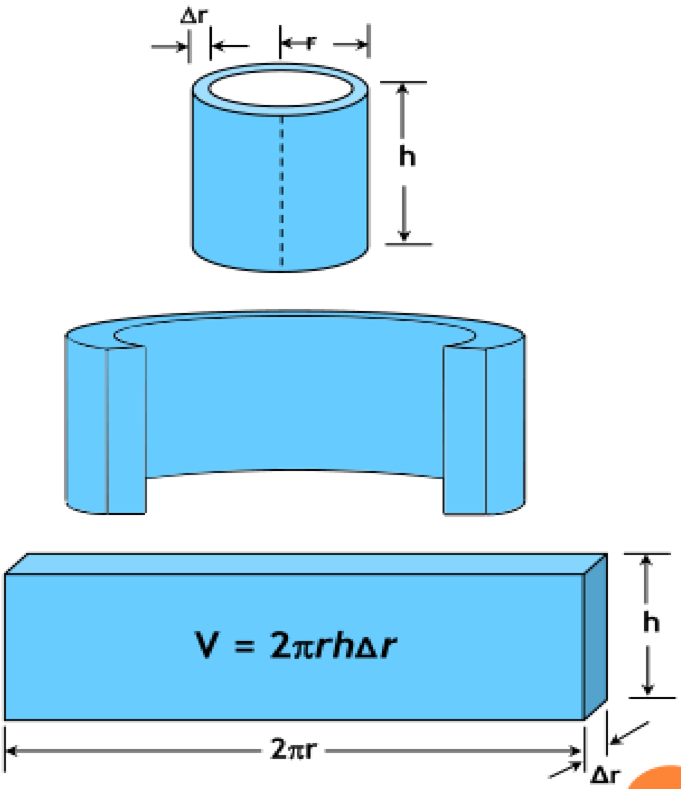
1. Gambarlah daerahnya
2. Buatlah sebuah partisi
3. Tentukan ukuran dan bentuk partisi.
4. Aproksimasi volume partisi yang diputar, jumlahkan, ambil limitnya, dan nyatakan dalam bentuk integral.



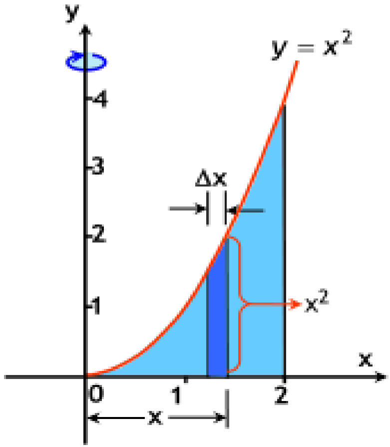
Metode kulit tabung yang digunakan untuk menentukan volume benda putar dapat dianalogikan seperti menentukan volume roti pada gambar disamping.

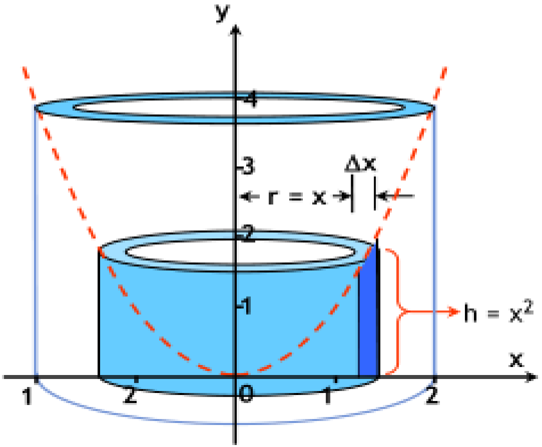


$$V = 2\pi\int_a^b x.y.dx$$



Dimana x merupakan jari-jari (r) dan y merupakan tinggi tabung (h)





$\Delta V \approx 2\pi r h \Delta x$

$\Delta V \approx 2\pi(x)(x^2)\Delta x$

$V \approx \sum 2\pi x^3 \Delta x$

$V = \lim \sum 2\pi x^3 \Delta x$

$$V = 2\pi \int_0^2 x.y.dx$$

$$V = 2\pi \int_0^2 x^3 \, dx$$

$$V = 2\pi \left[\tfrac{1}{4} x^4 \right]_0^2$$

$$V = 8\pi$$