DERET TAK HINGGA

Contoh deret tak hingga : $a_1 + a_2 + \ a_3 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ atau $\sum a_k$.
Barisan jumlah parsial $\{S_n\}$, dengan $S_n = a_1 + a_2 + \ a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

Definisi
Deret tak hingga, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, konvergen dan mempunyai jumlah S, apabila barisan jumlah-jumlah parsial $\{S_n\}$ konvergen menuju S. Apabila $\{S_n\}$ divergen, maka deret divergen. Suatu deret yang divergen tidak memiliki jumlah.

Deret Geometri
Suatu deret yang berbentuk:

$$\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} = a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots$$

Dengan $a \neq 0$ dinamakan deret geometri.

Kekonvergenan:

$$\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} \begin{cases} \text{konvergen ke } \dfrac{a}{1-r}, \text{ jika } |r| < 1 \\ \text{divergen jika } |r| \geq 1 \end{cases}$$

Bukti:
Misal $S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$
Jika r = 1 maka $S_n = na$ divergen karena jika n bertambah tanpa terbatas, jadi $\{S_n\}$ divergen jika$r \neq 1$.

$$S_n - rS_n = (a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}) - (ar + ar^2 + \cdots + ar^n)$$
$$(1-r)S_n = a - ar^n$$
$$S_n = \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r}$$

Jika $|r| < 1$, maka $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-r}$$

Jika $|r| > 1$ atau r = 1, barisan $\{r^n\}$ divergen, sehingga $\{S_n\}$ juga divergen.

Contoh:
a. $\frac{4}{3} + \frac{4}{9} + \frac{4}{27} + \frac{4}{81} + \cdots$
b. $0{,}51515151 \ldots = \frac{51}{100} + \frac{51}{10000} + \frac{51}{1000000} + \cdots$

Jawab:
a. $S = \frac{a}{1-r} = \frac{4/3}{1-1/3} = \frac{4/3}{2/3} = 2$
b. $S = \frac{\frac{51}{100}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{\frac{51}{100}}{\frac{99}{100}} = \frac{51}{99} = \frac{17}{33}$

Teorema

(Uji kedivergenan dengan suku ke-n). Apabila $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen, maka $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. berdasarkan pernyataan ini dapat dikatakan apabila $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ (atau apabila $\lim_{n\to\infty} a_n$ tidak ada) maka deret divergen

Deret Harmonik

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

Padahal

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \frac{1}{9} \ldots + \frac{1}{n}$$
$$> 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \frac{8}{16} + \cdots + \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

Dengan membuat n cukup besar, kita dapat mengambil $\frac{1}{2}$ sebanyak kita kehendaki pada persamaan yang terakhir. Jika $\{S_n\}$ divergen sehingga deret harmonik adalah divergen.

Sifat-sifat deret konvergen

Teorema B

(Kelinearan). Jika $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ dan $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ keduanya konvergen dan c sebuah konstanta, maka $\sum_{k=1}^{\infty} ca_k$ dan $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ juga konvergen, selain itu

1. $\sum_{k=1}^{\infty} ca_k = c\sum_{k=1}^{\infty} a_k$
2. $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$

Contoh: Tentukan jumlah deret berikut:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[2\left(\frac{1}{3}\right)^k + 3\left(\frac{1}{6}\right)^k\right]$$

Jawab:

$$\frac{33}{5}$$

Uji Kekonvergenan Deret Suku-suku positif.

<u>Pengujian dengan Integral tak Wajar</u>

Teorema (uji Integral)

Andaikan f suatu fungsi yang kontinu, positif dan tidak naik pada selang $[1, \infty)$. Andaikan $a_k = f(k)$ untuk semua k positif bulat. Maka deret tak hingga

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

Konvergen, jika dan hanya jika integral tak wajar

$$\int_1^\infty f(x)dx$$

Konvergen.

Contoh:

Periksa apakah deret $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$ konvergen atau divergen.

Jawab:

Hipotesis dalam Uji integral dipenuhi untuk $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ pada $[2, \infty)$. Maka

$$\int_2^\infty \frac{1}{x \ln x} dx = \lim_{t\to\infty} \int_2^t \frac{1}{x \ln x} dx = \lim_{t\to\infty} \int_2^t \frac{1}{\ln x} d(\ln x) = \lim_{t\to\infty} \ln x \Big|_2^t = \infty$$

Jadi $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k}$ divergen.

Contoh: (uji deret-p). Deret

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots$$

Dengan p sebuah konstanta dinamakan **deret-p**. Buktikan

a. Deret-p konvergen untuk $p > 1$

b. Deret-p divergen untuk $p \leq 1$

Jawab:

Apabila $p \geq 0$, fungsi $f(x) = \frac{1}{x^p}$ kontinu, positif dan tidak naik pada selang $[1, \infty)$, sedangkan $f(k) = \frac{1}{k^p}$, maka menurut uji integral, $\sum \left(\frac{1}{k^p}\right)$ konvergen jika dan hanya jika $\lim_{t\to\infty} \int_1^t x^{-p}\, dx$ ada (sebagai bilangan terhingga)

Jika $p \neq 1$

$$\int_1^t x^{-p}\, dx = \frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_1^t = \frac{t^{1-p} - 1}{1-p}$$

Apabila $p = 1$

$$\int_1^t x^{-1}\, dx = \ln x \Big|_1^t = \ln t$$

Oleh karena $\lim_{t\to\infty} t^{1-p} = 0$ apabila $p > 1$ dan $\lim_{t\to\infty} t^{1-p} = \infty$ apabila $p < 1$ dan oleh karena $\lim_{t\to\infty} \ln t = \infty$, kita dapat menarik kesimpulan bahwa deret-p konvergen apabila $p > 1$ dan divergen apabila $0 \leq p \leq 1$.

<u>Membandingkan suatu deret dengan deret lain</u>

Teorema (uji banding)

Andaikan untuk $n \geq N$ berlaku $0 \leq a_n \leq b_n$

1. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergen, maka $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ juga konvergen

2. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergen, maka $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ juga divergen

Contoh

Selidiki kekonvergenan deret: (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$, (b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$

a. Kita bandingkan deret) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$ dengan deret geometri $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ yang konvergen.
   Karena $2^n + 1 > 2^n$, maka $0 < \frac{1}{2^n+1} < \frac{1}{2^n}$ untuk $n \in \mathbb{N}$, dengan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ deret konvergen. Berdasarkan uji banding dengan deret lain, diperoleh bahwa deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$ juga konvergen.
b. Kita bandingkan deret $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ dengan deret harmonik $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ yang divergen. Untuk ini diperlukan ketaksamaan $\ln n < n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, dengan $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergen. Berdasarkan uji banding dengan deret lain, diperoleh bahwa deret $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ juga divergen.

Teorema (uji banding limit)

Misalkan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ adalah deret dengan suku-suku positif

1. Jika $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c, c > 0$, maka kedua deret bersama-sama konvergen atau divergen.
2. Jika $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergen, maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ juga konvergen.
3. Jika $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergen, maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ juga divergen.

Contoh:

Selidiki kekonvergenan deret: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$

Jawab:

Untuk menyelidiki kekonvergenan deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$, bandingkan dengan deret geometri $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ yang konvergen. Karena untuk $a_n = \frac{1}{2^n+1}$ dan $b_n = \frac{1}{2^n}$ berlaku

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^n + 1} = 1 > 0$$

Dan deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ konvergen, maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1}$ juga konvergen.

<u>Membandingkan suatu deret dengan dirinya</u>

Teorema (Uji Hasilbagi)

Andaikan $\sum a_n$ sebuah deret yang sukunya positif dan andaikan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$$

(i) Jika $\rho < 1$ deret konvergen
(ii) Jika $\rho > 1$ deret divergen
(iii) Jika $\rho = 1$, pengujian ini tidak memberikan kepastian.

Contoh Apakah deret

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$$

Konvergen atau divergen?

Jawab:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2.\,2^n}{(n+1).\,n!}\frac{n!}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{(n+1)} = 0$$

Menurut Uji hasilbagi deret itu konvergen.

Ringkasan

Untuk menguji apakah deret $\sum a_n$ dengan suku-suku positif itu konvergen atau divergen, perhatikan a_n dengan seksama.

1. Jika $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, menurut **Uji Hasilbagi** suku ke-n deret divergen
2. Jika a_n mengandung $n!, r^n$ atau n^n cobalah **Uji Hasilbagi**
3. Jika a_n mengandung hanya pangkat n yang konstan gunakan **Uji Banding Limit**. Khususnya, apabila a_n adalah bentuk rasional dalam n, gunakan pengujian ini dengan b_n sebagai **hasilbagi** suku-suku pangkat tertinggi n dalam pembilang dan penyebut a_n.
4. Sebagai usaha terakhir, cobalah **Uji Banding Biasa**, **Uji Intergral**
5. Beberapa deret mensyaratkan "manipulasi bijak" atau "trik hebat" untuk menentukan kekonvergenan dan kedivergenan.

TUGAS

Periksalah apakah deret itu konvergen atau divergen. Jika konvergen tentukan jumlahnya. (Tulislah beberapa suku yang permulaan untuk mempermudah pekerjaan anda)

1. $\sum_{k=0}^{\infty} \left[3\left(\frac{1}{4}\right)^k - 2\left(\frac{1}{5}\right)^k\right]$
2. $\sum_{k=3}^{\infty} \left[\frac{2}{k-1} - \frac{2}{k}\right]$

Tulislah bilangan desimal itu sebagai sebuah deret takhingga. Kemudian tentukan jumlahn deret tersebut. Akhirnya gunakan hasil yang diperoleh untuk menyatakan bilangan desimal itu sebagai hasil bagi dua bilangan bulat.

3. 0,125125125125…
4. 0,36717171…

Gunakan Uji Integral untuk menentukan apakah deret berikut konvergen atau divergen.

5. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2}$
6. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{e^k}$
7. $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 e^{-k^3}$

Gunakan Uji Banding Limit untuk menentukan kekonvergenan atau kedivergenan

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{n^3-4}$

Gunakan Uji Hasilbagi untuk menentukan kekonvergenan atau kedivergenan deret

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^5}$

Tentukan kekonvergenan atau kedivergenan deret dan sebutlah pengujian yang anda gunakan.

10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5+n}{n!}$