7 INTEGRAL

JUMLAH PERTEMUAN : 2 PERTEMUAN

TUJUAN INSTRUKSIONAL KHUSUS:

Memahami konsep dasar integral, teorema-teorema, sifat-sifat, notasi jumlah, fungsi transenden dan teknik-teknik pengintegralan.

Materi :

7.1 Anti Turunan

Definisi

F adalah suatu anti turunan dari f pada selang I jika $DF = f$ pada I, jika $F'(x) = f(x)$ untuk semua x dalam I

Contoh:

Carilah suatu anti turunan dari fungsi $f(x) = 3x^2$ pada $(-\infty, \infty)$

Penyelesaian:

$F'(x) = 3x^2$ untuk semua x rill maka $F(x) = x^3$

Tetapi seharusnya $F(x) = x^3 + C$.

Anti turunan dari suatu fungsi tidak tunggal, tapi perbedaannya berupa suatu bilangan konstan.

Anti turunan disebut juga **Integral Tak Tentu**.

Notasi:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

7.2 Sifat-sifat Integral Tak Tentu

1. Sifat yang diperoleh langsung dari turunan
   a. $\int 1\, dx = x + C$
   b. $\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C, r \neq 1$

c. $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$

d. $\int \cos x \, dx = \sin x + C$

e. $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$

f. $\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C$

2. Sifat kelinieran

a. $\int kf(x) \, dx = k \int f(x) \, dx$, k adalah suatu konstanta

b. $\int [f(x) + g(x)] \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx$

c. $\int [f(x) - g(x)] \, dx = \int f(x) \, dx - \int g(x) \, dx$

Contoh:

Hitung

$$\int (4x^3 + 3x^2 - 10) dx$$

Jawab:

$$\int (4x^3 + 3x^2 - 10) dx = \int 4\,x^3 dx + \int 3\,x^2 dx \int 10\,dx = 4 \int x^3\,dx + 3 \int x^2\,dx - 10 \int 1\,dx$$

$$= x^4 + x^3 - 10x + C$$

3. Integral dengan substitusi

Misal $u = g(x)$, $du = g'(x)dx$, dan F suatu anti turunan dari f, maka

$$\int f\big(g(x)\big)g'(x)\,dx = \int f(u)du = F(u) + c = F\big(g(x)\big) + c$$

Contoh:

Hitung $\int \sin(2x + 1) \, dx$

Jawab:

Misal $u = 2x + 1 \rightarrow du = 2dx \rightarrow dx = \frac{1}{2}du$

$$\int \sin(2x+1)\,dx = \frac{1}{2}\int \sin u\,du = \frac{1}{2}(-\cos u) + C = -\frac{1}{2}\cos(2x+1) + C$$

Contoh:

Hitung $\int (x^3+1)^{10} x^5 dx$

Jawab: $\frac{1}{36}(x^3+1)^{12} - \frac{1}{33}(x^3+1)^{11} + C$

7.3 Notasi Sigma ($\sum$)

Notasi sigma (jumlah):

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \text{ dan } \sum_{i=1}^{n} k = k + k + \cdots + k = nk$$

Sifat dan rumus sigma

1. $\sum_{i=1}^{n}(ka_i + lb_i) = k\sum_{i=1}^{n} a_i + l\sum_{i=1}^{n} b_i$
2. $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$
3. $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
4. $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

Contoh: Hitung

$$\sum_{k=1}^{5}(3k^2+2)$$

Jawab:

$$\sum_{k=1}^{5}(3k^2+2) = 3\sum_{k=1}^{5} k^2 + \sum_{k=1}^{5} 2 = 3\left(\frac{5(5+1)(2(5)+1)}{6}\right) + (2+2+2+2+2) = 3(55) + 10$$
$$= 175$$

7.4 Fungsi Transenden

1. Fungsi Logaritma Asli

   Fungsi logaritma asli (ln) didefinisikan sebagai:

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt, x > 0$$

Maka turunan

$$D_x[\ln x] = D_x\left(\int_1^x \frac{1}{t} dt\right) = \frac{1}{x}$$

Secara umum, jika $u = u(x)$ maka

$$D_x[\ln u] = D_x\left(\int_1^{u(x)} \frac{1}{t} dt\right) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

Contoh:

Diberikan $f(x) = \ln(4x^2 + 2)$ maka f'(x)?

Jawab:

$$f'(x) = \frac{1}{4x^2 + 2} D_x(4x^2 + 2) = \frac{8x}{4x^2 + 2}$$

Jika $y = \ln|x|, x \neq 0$

$$y = \ln|x| = \begin{cases} \ln x & , x > 0 \\ \ln(-x) & , x < 0 \end{cases}$$

Untuk $y = \ln x$ maka $y' = \frac{1}{x}$

Untuk $y = \ln(-x)$ maka $y' = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$

Maka $\frac{d}{dx}(\ln|x|) = \frac{1}{x} \;, x \neq 0$

Dari sini diperoleh

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

Sifat-sifat ln:

1. $\ln 1 = 0$
2. $\ln(ab) = \ln a + \ln b$

3. $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
4. $\ln a^r = r \ln a$

Contoh: Hitung

$$\int \frac{x^2}{x^3+2} dx$$

Jawab:

Misal $u = x^3 + 2$ maka $du = 3x^2 dx$

$$\int \frac{x^2}{x^3+2} dx = \int \frac{x^2}{u} \frac{du}{3x^2} = \frac{1}{3} \int \frac{1}{u} du = \frac{1}{3} \ln|u| + C = \frac{1}{3} \ln|x^3+2| + C$$

7.5 Fungsi Eksponen Asli

Invers dari fungsi logaritma natural disebut eksponen asli, notasi exp. Ditulis

$$y = \exp(x) \quad \text{atau} \quad y = e^x$$

Definisi: Bilangan e adalah bilangan Real positif yang bersifat $\ln e = 1$.

Jadi

$$D_x(e^x) = e^x$$

Sehingga

$$\int e^x \, dx = e^x + C$$

7.6 Fungsi Eksponen Umum

Fungsi $f(x) = a^x, a > 0$ disebut juga fungsi eksponen umum

$$D_x(a^x) = a^x \ln a$$

Jika $u = u(x)$, maka

$$D_x(a^u) = a^u u' \ln a$$

Contoh:

Hitung turunan dari $f(x) = 5^{\tan x}$

Jawab:

$$f'(x) = 5^{\tan x} \sec^2 x \ln 5$$

7.7 Fungsi Invers Trigonometri

Invers dari fungsi sinus dan arcsinus atau ditulis

$$y = \sin^{-1} x$$

$$D_x(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \leftrightarrow \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x + C$$

$y = \sin^{-1} x \rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x + C$
$y = \cos x \rightarrow y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \cos^{-1} x + C$
$y = \tan^{-1} x \rightarrow y' = \frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x + C$
$y = \sec^{-1} x \rightarrow y' = \frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$	$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \sec^{-1}\lvert x\rvert + C$

7.8 Teknik Pengintegralan

1. Pengintegralan dengan substitusi

$\int k\, du = ku + C$	$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$
$\int u^r\, du = \begin{cases} \frac{u^{r+1}}{r+1} + C & r \neq 1 \\ \ln\lvert u\rvert & r = 1 \end{cases}$	$\int \cos x\, dx = \sin x + C$
$\int e^u\, du = e^u + C$	$\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$
$\int a^u\, du = \frac{a^u}{\ln a} + C, a \neq 1, a > 0$	$\int \csc^2 x\, dx = -\cot x + C$
	$\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + C$

	$$\int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + C$$ $$\int \tan x \, dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$$ $$\int \cot x \; dx = \ln\lvert\sin u\rvert + C$$
$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$ $$\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$$ $$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left(\frac{\lvert u\rvert}{a}\right) + C = \frac{1}{a}\cos^{-1}\left(\frac{a}{\lvert u\rvert}\right) + C$$	

2. Beberapa integral trigonometri

a. $\int \sin^{n} x \, dx$ dan $\int \cos^{n} x \, dx$

Jika (n ganjil)

Contoh:

Tentukan $\int \sin^5 x \, dx$

Jawab:

$$\int \sin^5 x \, dx = \int \sin^4 x \sin x \, dx = \int (1 - \cos^2 x)^2 \sin x \, dx = \int (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x) \sin x \, dx$$

Misal: $u = \cos x$ maka $du = -\sin x \, dx$

$$= -\int (1 - 2u^2 + u^4) \, du = -\left(u - \frac{2}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5\right) + C$$

Substitusi $u = \cos x$

$$= -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x + \frac{1}{5}\cos^5 x + C$$

Jika (n genap)

Contoh:

Tentukan $\int \cos^4 x\, dx$

Jawab:

$$\int \cos^4 x\, dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x)\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(1 + 2\cos 2x + \left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right)\right) dx = \frac{1}{4}\int \left(1 + 2\cos 2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x\right) dx$$

$$= \int \left(\frac{3}{4} + 2\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x\right) dx = \frac{3}{4}x + \sin 2x + \frac{1}{8}\sin 4x + C$$

b. $\int \sin mx \cos nx\, dx$, $\int \sin mx \sin nx\, dx$, $\int \cos mx \cos nx\, dx$

Ingat kesamaan:

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x]$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]$$

$$\sin mx \sin nx = -\frac{1}{2}[\sin(m+n)x - \sin(m-n)x]$$

Contoh:

Tentukan $\int \sin 4x \cos 5x\, dx$

Jawab:

$$\int \sin 4x \cos 5x\, dx = \frac{1}{2}\int (\sin(4x+5x) + \sin(4x-5x))\, dx = \frac{1}{2}\left[\int \sin 9x\, dx + \int \sin(-x)\, dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{9}\cos 9x\right) + \frac{1}{2}(\cos x) = -\frac{1}{18}\cos 9x + \frac{1}{2}\cos x + C$$

3. Substitusi yang Merasionalkan

Integran yang memuat $\sqrt[n]{ax+b}$

Apabila di dalam integran ada bentuk $\sqrt[n]{ax+b}$ substitusi $u = \sqrt[n]{ax+b}$, dapat merasionalkan integran.

Contoh:

Tentukan $\int \frac{tdt}{\sqrt{2t+7}}$

Jawab:

$$\int \frac{tdt}{\sqrt{2t+7}}$$

Misal $u = \sqrt{2t+7} \leftrightarrow u^2 = 2t+7 \leftrightarrow 2udu = 2dt$ dan $t = \frac{u^2-7}{2}$

$$\int \frac{tdt}{\sqrt{2t+7}} = \int \frac{\frac{u^2-7}{2}udu}{u} = \int \frac{u^2-7}{2}du = \frac{1}{6}u^3 - 7u + C = \frac{1}{6}\left(\sqrt{2t+7}\right)^3 - 7\sqrt{2t+7} + C$$

Integran yang mengandung $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{a^2+x^2}$, dan $\sqrt{x^2-a^2}$, untuk merasionalkan bentuk akar-akar tersebut kita gunakan masing-masing subsitusi berikut:

1. $x = a\sin t$
2. $x = a\tan t$
3. $x = a\sec t$

Untuk melihat akibat subtitusi tersebut, perhatikanlah bahwa:

1. $a^2 - x^2 = a^2 - a^2\sin^2 t = a^2(1-\sin^2 t) = a^2\cos^2 t$
2. $a^2 + x^2 = a^2 - a^2\tan^2 t = a^2(1+\tan^2 t) = a^2\sec^2 t$
3. $x^2 - a^2 = a^2\sec^2 t - a^2 -= a^2(\sec^2 t - 1) = a^2\tan^2 t$

Apabila daerah asal dibatasi sedemikian rupa sehingga substitusi (1), (2), dan (3) memiliki invers, maka

1. $\sqrt{a^2-x^2} = a|\cos t| = a\cos t$(sebab $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$)

2. $\sqrt{a^2 + x^2} = a|\sec t| = \text{a} \sec t (\text{sebab } -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2})$
3. $\sqrt{x^2 + a^2} = a|\tan t| = \pm \text{a} \tan t (\text{sebab } 0 \leq t \leq \pi, t \neq \frac{\pi}{2})$

Contoh Tentukan $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$

Jawab: Kita gunakan substitusi $x = a \sin t, -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

Maka $dx = a \cos t\, dt$ dan $\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos t$. Sehingga

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \int a \cos t \cdot a \cos t\, dt = a^2 \int \cos^2 t\, dt = \frac{a^2}{2} \int (1 + \cos 2t)\, dt$$
$$= \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2} \sin 2t\right) + C = \frac{a^2}{2}(t + \sin t \cos t) + C$$

Oleh karena $x = a \sin t$ ekivalen dengan ${}^{x}/_{a} = \sin t$ dan oleh karena selang t dibatasi sehingga sinus memiliki invers, maka

$$t = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$

Juga dengan sebuah kesamaan yaitu

$$\cos t = \cos\left[\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right] = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

Maka

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{a^2}{2}(t + \sin t \cos t) + C = \frac{a^2}{2} \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C$$

4. Pengintegralan Parsial (**teknik ini digunakan jika integran merupakan perkalian dua fungsi yang berbeda jenis)**

Formula:

$$\int UdV = UV - \int VdU$$

Contoh:

$$\int x^2 \sin x \, dx$$

Jawab:

Misal $U = x^2$ maka $dU = 2xdx$ dan $dV = \sin x \, dx$ maka $V = -\cos x$, maka

$$\int x^2 \sin x \, dx = -x^2 \cos x - \int -\cos x \, 2x \, dx = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos \; x \, dx$$

Misal $U = x$ maka $du = dx$ dan $dV = \cos x \, dx$ maka $V = \sin x$

$$\int x^2 \sin x \, dx = -x^2 \cos x + 2 \left[x \sin x - \int \sin x \, dx \right] = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C$$

5. Pengintegralan Fungsi Rasional

Contoh:

Tentukan $\int \frac{2}{(x+1)^3} dx$

Jawab:

Gunakan substitusi $u = x + 1$. Maka

$$\int \frac{2}{(x+1)^3} dx = \int \frac{2}{u^3} du = -\frac{2}{2u^2} + C = -\frac{1}{(x+1)^2} + C$$

Penjabaran menjadi pecahan parsial

Contoh 1.

Tentukan $\int \frac{2}{x^2-1} dx$

Jawab:

$$\frac{2}{x^2-1} = \frac{2}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+B(x+1)}{x^2-1} = \frac{(A+B)x-A+B}{x^2-1}$$

Dengan menyamakan ruas kiri dan ruas kanan $\frac{2}{x^2-1} = \frac{(A+B)x-A+B}{x^2-1}$ maka diperoleh

$A+B=0$ dan $-A+B=2$maka diperoleh $A=-1$ dan $B=1$, maka

$$\int \frac{2}{x^2-1} dx = \int \left(\frac{-1}{x+1} + \frac{1}{x-1}\right) dx = -\ln|x+1| + \ln|x-1| + C$$

Contoh 2.

Tentukan $\int \frac{5x+7}{x^2+4x+4} dx$

Jawab:

$$\frac{5x+7}{x^2+4x+4} = \frac{5x+7}{(x+2)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} = \frac{A(x+2)+B}{(x+2)^2} = \frac{Ax+(2A+B)}{(x+2)^2}$$

Dengan menyamakan ruas kiri dan ruas kanan $\frac{5x+7}{x^2+4x+4} = \frac{Ax+(2A+B)}{(x+2)^2}$ maka diperoleh

$A=5$ dan $2A+B=7$ maka diperoleh $B=-3$, maka

$$\int \frac{5x+7}{x^2+4x+4} dx = \int \left(\frac{5}{x+2} - \frac{3}{(x+2)^2}\right) dx = 5\ln|x+2| + \frac{3}{x+2} + C$$

Contoh 3.

Tentukan $\int \frac{2x^2-3x-36}{(2x-1)(x^2+9)} dx$

Jawab:

$$\frac{2x^2-3x-36}{(2x-1)(x^2+9)}=\frac{A}{2x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+9}=\frac{A(x^2+9)+(Bx+C)(2x-1)}{(2x-1)(x^2+9)}$$
$$=\frac{(A+2B)x^2+(B+2C)x+9A-C}{(2x-1)(x^2+9)}$$

Dengan menyamakan ruas kiri dan ruas kanan $\frac{2x^2-3x-36}{(2x-1)(x^2+9)}=\frac{(A+2B)x^2+(B+2C)x+9A+C}{(2x-1)(x^2+9)}$ maka diperoleh

$A+2B=2$ ....(1)

$B+2C=-3$ ....(2)

$9A-C=-36$...(3)

Dari persamaan (1) diperoleh $A=2-2B$..(4), substitusi (4) ke (3) diperoleh $-18B-C=-54$...(5).

Eliminasi C dari persamaan (2) dan (3) diperoleh $C=3$ substitusi ke persamaan (2) diperoleh $B=-9$ dan substitusi ke persamaan (1) maka diperoleh $A=20$, maka

$$\int\frac{2x^2-3x-36}{(2x-1)(x^2+9)}dx=\int\left(\frac{20}{2x-1}+\frac{-9x+3}{x^2+9}\right)dx=\int\frac{20}{2x-1}dx-\int\frac{9x}{x^2+9}dx+\int\frac{3}{x^2+9}dx$$
$$=10\ln|2x-1|-\frac{9}{2}\ln|x^2+9|+\tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)+C$$