

MODEL TRANSPORTASI - II

MATAKULIAH RISET OPERASIONAL

Pertemuan Ke-9

Riani Lubis

Program Studi Teknik Informatika

Universitas Komputer Indonesia

Menentukan Entering Variable & Leaving Variable

- Tahap selanjutnya dari teknik pemecahan persoalan transportasi adalah menentukan entering dan leaving variable.
- Tahap ini dilakukan setelah diperoleh solusi fisible basis awal.
- Ada dua cara yang dapat digunakan dalam menentukan entering dan leaving variable, yaitu :
 - a) Metode Stepping Stone
 - b) Metode Multipliers

Metode Stepping Stone

- Setelah solusi fisibel basis awal diperoleh dari masalah transportasi, langkah berikutnya adalah menekan ke bawah biaya transpor dengan memasukkan variabel non-basis (yaitu alokasi komoditas ke kotak kosong) ke dalam solusi.
- Proses evaluasi variabel non-basis yang memungkinkan terjadinya perbaikan solusi dan kemudian mengalokasikan kembali dinamakan metode stepping-stone.
- Variabel non-basis = kolom-kolom yang tidak mempunyai nilai
- Variabel basis = kolom-kolom yang mempunyai nilai

Beberapa hal penting dalam penyusunan jalur stepping stone :

1. Arah jalur yang diambil : baik searah maupun berlawanan arah dengan jarum jam adalah tidak penting dalam membuat jalur tertutup.
2. Jalur-jalur dimulai dari setiap kotak kosong (variabel non basis) yang harus diteruskan ke kotak-kotak terisi (variabel basis), dan pada akhirnya kembali ke kotak kosong awal.
3. Hanya ada satu jalur tertutup untuk setiap kotak kosong.
4. Jalur yang dibuat harus/hanya mengikuti kotak terisi (dimana pada kotak ini terjadi perubahan arah), kecuali pada kotak kosong yang sedang dievaluasi.
5. Namun, baik kotak terisi maupun kosong dapat dilewati dalam penyusunan jalur tertutup.
6. Suatu jalur dapat terjadi perpotongan.
7. Sebuah penambahan dan sebuah pengurangan yang sama besar harus kelihatan pada setiap baris kolom pada jalur itu.

Contoh 1

Karena dari langkah 1 diperoleh solusi fisibel awal dari metoda VAM dengan $Z = 1920$ dan tabel distribusinya sbb :

Tuj Sbr	1	2	3	supply
1	70 8	50 5	6 6	120
2	15	70 10	10 12	80
3	80 3	9	10	80
Demand	150	70	60	280

Maka dari tabel VAM di samping, dilakukan perhitungan solusi optimum.

Loop 1 :

Tuj Sbr	1	2	3	supply
1	70 8	+ 5	- 6	120
2	15	- 10	+ 12	80
3	80 3	9	10	80
Demand	150	70	60	280

Jalur : $X_{12} = X_{12} \Rightarrow X_{13} \Rightarrow X_{23} \Rightarrow X_{22} \Rightarrow X_{12}$

ΔC : $\Delta C_{12} = 5 - 6 + 12 - 10 = +1$

Loop 2 :

Sbr \ Tuj	1	2	3	supply
1	<div> <div>-</div> <div>8</div> </div>	<div> <div>5</div> </div>	<div> <div>+</div> <div>6</div> </div>	120
2	<div> <div>15</div> </div>	<div> <div>10</div> </div>	<div> <div>12</div> </div>	80
3	<div> <div>3</div> </div>	<div> <div>9</div> </div>	<div> <div>10</div> </div>	80
Demand	150	70	60	280

Jalur : $X_{21} = X_{21} \Rightarrow X_{11} \Rightarrow X_{13} \Rightarrow X_{23} \Rightarrow X_{21}$

ΔC : $\Delta C_{21} = 15 - 8 + 6 - 12 = +1$

Loop 3 :

Sbr \ Tuj	1	2	3	supply
1	<div> <div>+</div> <div>70</div> <div>8</div> <div>5</div> <div>6</div> <div>120</div> </div>			
2	<div> <div>15</div> <div>10</div> <div>12</div> <div>80</div> </div>	<div> <div>-</div> <div>70</div> <div>10</div> <div>+</div> </div>		
3	<div> <div>3</div> <div>9</div> <div>10</div> <div>80</div> </div>	<div> <div>+</div> <div>80</div> </div>		
Demand	150	70	60	280

Jalur : $X_{32} = X_{32} \Rightarrow X_{31} \Rightarrow X_{11} \Rightarrow X_{13} \Rightarrow X_{23} \Rightarrow X_{22} \Rightarrow X_{32}$

ΔC : $\Delta C_{32} = 9 - 3 + 8 - 6 + 12 - 10 = + 10$

Loop 4 :

Tuj \ Sbr	1	2	3	supply
1	<div><div><div>+</div><div>8</div></div><div><div>70</div><div>↑</div></div></div>	<div><div>5</div><div>→</div></div>	<div><div><div>-</div><div>6</div></div><div><div>50</div><div>↓</div></div></div>	120
2	<div><div>15</div><div>70</div></div>	<div><div>10</div><div>10</div></div>	<div><div>12</div><div>10</div></div>	80
3	<div><div>3</div><div>80</div></div>	<div><div>9</div><div>←</div></div>	<div><div>10</div><div><div>+</div></div></div>	80
Demand	150	70	60	280

Jalur : $X_{33} = X_{33} \Rightarrow X_{31} \Rightarrow X_{11} \Rightarrow X_{13} \Rightarrow X_{33}$

ΔC : $\Delta C_{33} = 10 - 3 + 8 - 6 = +9$

- Jalur stepping stone untuk semua kotak kosong (Variabel Non Basis) :

$$X_{12} \Rightarrow X_{12} \rightarrow X_{13} \rightarrow X_{23} \rightarrow X_{22} \rightarrow X_{12}$$

$$X_{21} \Rightarrow X_{21} \rightarrow X_{11} \rightarrow X_{13} \rightarrow X_{23} \rightarrow X_{21}$$

$$X_{32} \Rightarrow X_{32} \rightarrow X_{31} \rightarrow X_{11} \rightarrow X_{13} \rightarrow X_{23} \rightarrow X_{22} \rightarrow X_{32}$$

$$X_{33} \Rightarrow X_{33} \rightarrow X_{31} \rightarrow X_{11} \rightarrow X_{13} \rightarrow X_{33}$$

- Perubahan biaya yang dihasilkan dari masing-masing jalur :

$$\Delta C_{12} = C_{12} - C_{13} + C_{23} - C_{22} = 5 - 6 + 12 - 10 = +1$$

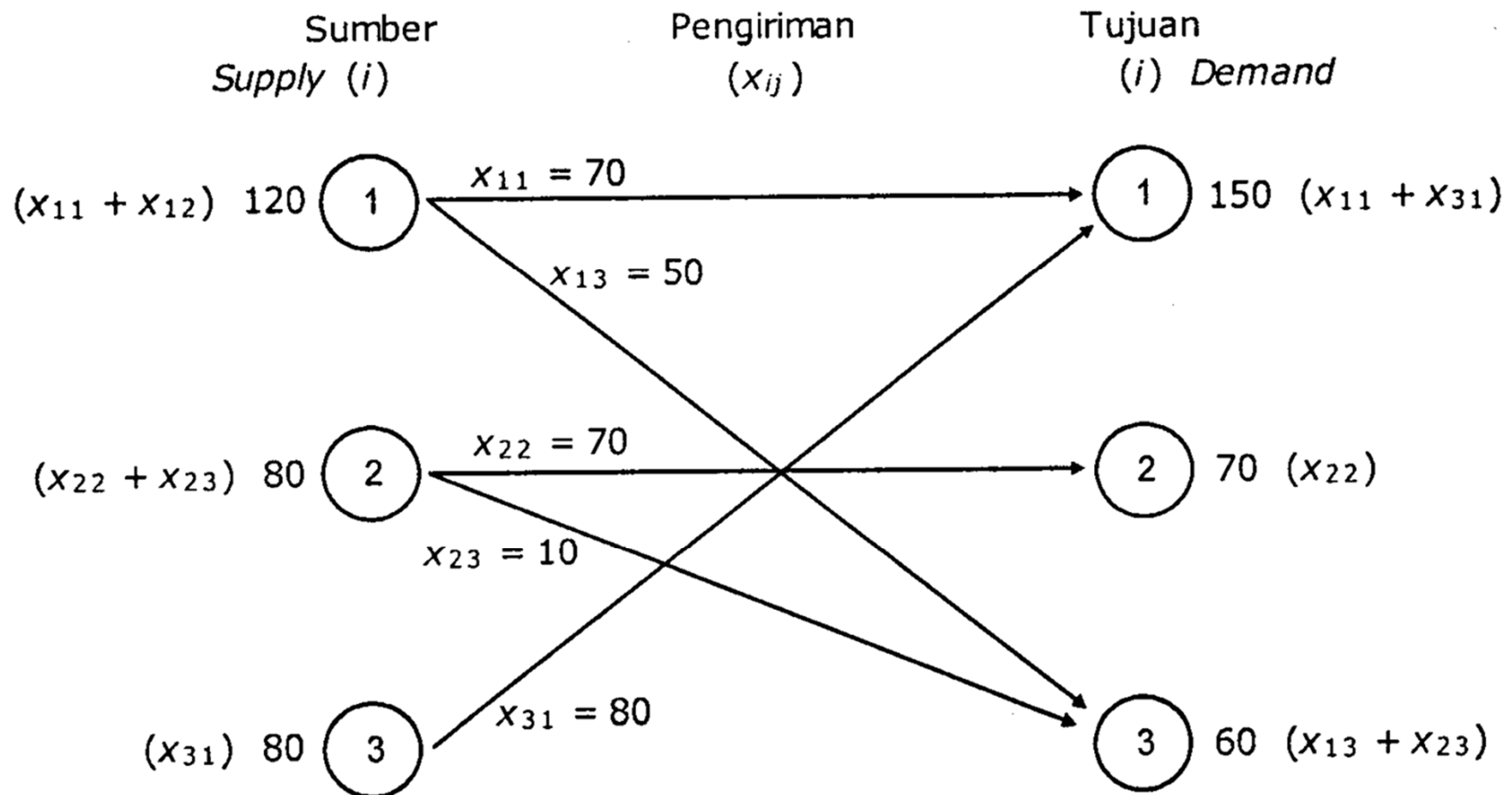
$$\Delta C_{21} = 15 - 8 + 6 - 12 = +1$$

$$\Delta C_{32} = 9 - 3 + 8 - 6 + 12 - 10 = +10$$

$$\Delta C_{33} = 10 - 3 + 8 - 6 = +9$$

Karena tidak ada calon entering variabel (semua kotak kosong memiliki C_{ij} positif), berarti solusi sudah optimum.

- Solusinya :



Contoh 2

Jika diasumsikan solusi fisibel awal diperoleh dari NWCR dengan $Z = 2690$ dan tabel distribusinya sbb :

Tuj Sbr	1	2	3	supply
1	8 120	5	6	120
2	15 30	10 50	12	80
3	3	9 20	10 60	80
Demand	150	70	60	280

Maka dari tabel NWCR di samping, dilakukan perhitungan solusi optimum.

Loop 1 :

Sbr \ Tuj	1	2	3	supply
1	- 8	+ 5	6	120
2	+ 15	10	12	80
3	3	9	10	80
Demand	150	70	60	280

Diagram illustrating the initial allocation and the first loop (Loop 1) for a transportation problem. The table shows the supply and demand for three destinations (Tuj) and three sources (Sbr).

The initial allocation is shown by the numbers in the cells:

- Source 1 to Destination 1: 8
- Source 1 to Destination 2: 5
- Source 1 to Destination 3: 6
- Source 2 to Destination 1: 15
- Source 2 to Destination 2: 10
- Source 2 to Destination 3: 12
- Source 3 to Destination 1: 3
- Source 3 to Destination 2: 9
- Source 3 to Destination 3: 10

The total supply for each source is 120, 80, and 80 respectively. The total demand for each destination is 150, 70, and 60 respectively. The total supply is 280, and the total demand is 280.

Loop 1 is identified by the alternating '+' and '-' signs in the cells (1,1), (1,2), (2,2), and (2,1). The values 120, 30, 50, and 20 are associated with the segments of the loop.

Loop 2 :

Sbr \ Tuj	1	2	3	supply
1	- 8 120	5	+ 6 60	120
2	+ 15 30	- 10 50	12	80
3	3	9 20	+ 10 60 -	80
Demand	150	70	60	280

Loop 3 :

<div>Tuj</div> <div>Sbr</div>	1	2	3	supply
1	120 <div>8</div>	<div>5</div>	<div>6</div>	120
2	30 <div>15</div>	<div>10</div>	<div>12</div>	80
3	<div>3</div>	<div>9</div>	<div>10</div>	80
Demand	150	70	60	280

Loop 4 :

Tuj \ Sbr	1	2	3	supply
1	120 8	5	6	120
2	- 30 15	+ 50 10	12	80
3	+ 20 3	- 9	10	80
Demand	150	70	60	280

- Jalur stepping stone untuk semua kotak kosong (variabel non-basis):

$$X_{12} \Rightarrow X_{12} \rightarrow X_{22} \rightarrow X_{21} \rightarrow X_{11} \rightarrow X_{12}$$

$$X_{13} \Rightarrow X_{13} \rightarrow X_{33} \rightarrow X_{32} \rightarrow X_{22} \rightarrow X_{21} \rightarrow X_{11} \rightarrow X_{13}$$

$$X_{23} \Rightarrow X_{23} \rightarrow X_{33} \rightarrow X_{32} \rightarrow X_{22} \rightarrow X_{23}$$

$$X_{31} \Rightarrow X_{31} \rightarrow X_{21} \rightarrow X_{22} \rightarrow X_{32} \rightarrow X_{31}$$

- Perubahan biaya yang dihasilkan dari masing-masing jalur :

$$\Delta C_{12} = 5 - 10 + 15 - 8 = +2$$

$$\Delta C_{21} = 6 - 10 + 9 - 10 + 15 - 8 = +2$$

$$\Delta C_{32} = 12 - 10 + 9 - 10 = +1$$

$$\Delta C_{31} = 3 - 15 + 10 - 9 = -11$$

- Hanya nilai X_{31} yang memiliki perubahan biaya negatif ($C_{31} = -11$), sehingga X_{31} adalah variabel nonbasis dengan nilai C_{ij} negatif, yang jika dimasukkan ke solusi yang ada akan menurunkan biaya.
- Jika terdapat dua atau lebih variabel nonbasis dengan C_{ij} negatif, maka dipilih satu yang memiliki perubahan menurunkan biaya yang terbesar.
- Jika terdapat nilai kembar, pilih salah satu secara sembarang.
- Karena telah menentukan X_{31} adalah entering variabel, kemudian harus ditetapkan berapa yang akan dialokasikan ke kotak X_{31} (tentunya ingin dialokasikan sebanyak mungkin ke X_{31}).
- Untuk menjaga kendala penawaran dan permintaan, alokasi harus dibuat sesuai dengan jalur stepping stone yang telah ditentukan untuk X_{31} .

Karena pada Loop 4, komoditas yang paling kecil adalah $X_{32} = 20$ (yang bertanda negatif), maka nilai komoditas tersebut dipilih sebagai koefisien yang mengurangi dan menambah setiap komoditas pada jalur Loop 4 sesuai tanda yang telah ditentukan sebelumnya.

Tuj Sbr	1	2	3	supply
1	<div>8</div> <div>120</div>	<div>5</div>	<div>6</div>	120
2	<div>15</div> <div>30 – 20</div>	<div>10</div> <div>50 + 20</div>	<div>12</div>	80
3	<div>3</div> <div>0 + 20</div>	<div>9</div> <div>20 – 20</div>	<div>10</div> <div>60</div>	80
Demand	150	70	60	280

Iterasi 1 :

Tuj Sbr	1	2	3	supply
1	8 120	5	6 120	120
2	15 10	10 70	12 80	80
3	3 20	9	10 60	80
Demand	150	70	60	280

- Proses stepping stone yang sama untuk mengevaluasi kotak kosong harus diulang, untuk menentukan apakah solusi telah optimum atau apakah ada calon entering variabel

Iterasi 2 :

Tuj Sbr	1	2	3	supply
1	120 8	5	6	120
2	15	10 70	12 10	80
3	3 30	9	10 50	80
Demand	150	70	60	280

Iterasi 3 :

Tuj Sbr	1	2	3	supply
1	70 8	5	6 50	120
2	15	70 10	12 10	80
3	3 80	9	10	80
Demand	150	70	60	280

Solusi ? Sama dengan hasil metode VAM ?

Metode Multiplier (1)

- Metode ini adalah variasi metode *stepping stone*.
- Pada metode ini tidak perlu menentukan semua jalur tertutup variabel nonbasis. Sebagai gantinya, nilai-nilai C_{ij} ditentukan secara serentak dan hanya jalur tertutup untuk entering variabel yang diidentifikasi
- Langkahnya :
 1. Tentukan nilai-nilai U_i untuk setiap baris dan nilai-nilai V_j untuk setiap kolom dengan menggunakan hubungan $C_{ij} = U_i + V_j$ untuk semua basis dan tetapkan nilai nol untuk U_1 .

Metode Multiplier (2)

2. Hitung perubahan biaya, C_{ij} untuk setiap variabel nonbasis dengan menggunakan rumus

$$\Delta C_{ij} = C_{ij} - U_i - V_j.$$

2. Jika terdapat nilai C_{ij} **negatif**, maka solusi **belum optimal**. Kemudian pilih variabel X_{ij} dengan nilai C_{ij} **negatif terbesar** sebagai **entering variabel**.
3. Alokasikan komoditas ke entering variabel, X_{ij} sesuai proses *stepping stone*. Lalu kembali ke langkah 1.

- Misal solusi fisibel awal diperoleh dari metode NWCR

Sbr \ Tuj				supply
	1	2	3	
1	120 8	5	6	120
2	30 15	50 10	12	80
3	3	20 9	60 10	80
Demand	150	70	60	280

- Tentukan nilai-nilai baris & kolom dengan asumsi $U_1 = 0$

$$V_1 = 8 \quad V_2 = 3 \quad V_3 = 4$$

$$U_1 = 0$$

$$U_2 = 7$$

$$U_3 = 6$$

Tuj Sbr		1	2	3	supply
1	120	8	5	6	120
2	30	15	10	12	80
3		3	9	10	80
Demand		150	70	60	280

- Biaya-biaya pada variabel Basis (kotak isi) :

$$C_{11} = 8 \quad C_{21} = 15$$

$$C_{22} = 10 \quad C_{32} = 9 \quad C_{33} = 10$$

- Diasumsikan : $U_1 = 0$

- Nilai-nilai U_i dan V_j :

$$X_{11} \Rightarrow U_1 + V_1 = C_{11}$$

$$0 + V_1 = 8$$

$$\mathbf{V_1 = 8}$$

$$X_{21} \Rightarrow U_2 + V_1 = C_{21}$$

$$\mathbf{U_2 = 7}$$

$$X_{22} \Rightarrow U_2 + V_2 = C_{22}$$

$$\mathbf{V_2 = 3}$$

$$X_{32} \Rightarrow U_3 + V_2 = C_{32}$$

$$\mathbf{U_3 = 6}$$

$$X_{33} \Rightarrow U_3 + V_3 = C_{33}$$

$$\mathbf{V_3 = 4}$$

- Perubahan biaya untuk semua variabel non-basis (kotak kosong) : $\Delta \mathbf{C}_{ij} = \mathbf{C}_{ij} - \mathbf{U}_i - \mathbf{V}_j$

$$\Delta C_{12} = C_{12} - U_1 - V_2 = 5 - 0 - 3 = 2$$

$$\Delta C_{13} = C_{13} - U_1 - V_3 = 6 - 0 - 4 = 2$$

$$\Delta C_{23} = C_{23} - U_2 - V_3 = 12 - 7 - 4 = 1$$

$$\Delta C_{31} = C_{31} - U_3 - V_1 = 3 - 6 - 8 = -11$$

- C_{31} negatif, menunjukkan bahwa solusi yang ada belum optimal dan X_{31} adalah *entering variabel*.

Buat loop yang dimulai dari X_{31}

Tuj Sbr	1	2	3	supply
1	120 8	5	6	120
2	- 15 30	+ 10 50	12	80
3	+ 3	9 20	10 60	80
Demand	150	70	60	280

Karena pada loop tersebut, komoditas yang paling kecil adalah $X_{32} = 20$ (yang bertanda negatif), maka nilai komoditas tersebut dipilih sebagai koefisien yang mengurangi dan menambah setiap komoditas pada jalur loop tersebut sesuai tanda yang telah ditentukan sebelumnya.

Tuj Sbr	1	2	3	supply
1	<div>8</div> <div>120</div>	<div>5</div>	<div>6</div>	120
2	<div>15</div> <div>30 – 20</div>	<div>10</div> <div>50 + 20</div>	<div>12</div>	80
3	<div>3</div> <div>0 + 20</div>	<div>9</div> <div>20 – 20</div>	<div>10</div> <div>60</div>	80
Demand	150	70	60	280

Iterasi 1 :

Sbr \ Tuj	Tuj			supply
	1	2	3	
1	<div>8</div> <div>120</div>	<div>5</div>	<div>6</div>	120
2	<div>15</div> <div>10</div>	<div>10</div> <div>70</div>	<div>12</div>	80
3	<div>3</div> <div>20</div>	<div>9</div>	<div>10</div> <div>60</div>	80
Demand	150	70	60	280

- Setelah mendapatkan solusi pada iterasi 1, maka nilai-nilai U_i , V_j dan C_{ij} pada tabel iterasi 1 harus dihitung lagi untuk uji optimalitas dan menentukan *entering variabel*.
- Lakukan hal tersebut di atas berulang-ulang hingga diperoleh kondisi optimum.
- Solusi optimum untuk contoh di atas ini memerlukan iterasi yang sama dengan metode stepping stone dan alokasi yang sama akan terjadi pada setiap iterasi.

Iterasi 1 :

$$V_1 = 8 \quad V_2 = 3 \quad V_3 = 15$$

$$U_1 = 0$$

$$U_2 = 7$$

$$U_3 = -5$$

Sbr \ Tuj				supply
	1	2	3	
1	<div>8</div> <div>120</div>	<div>5</div>	<div>6</div>	120
2	<div>15</div> <div>10</div>	<div>10</div> <div>70</div>	<div>12</div>	80
3	<div>3</div> <div>20</div>	<div>9</div>	<div>10</div> <div>60</div>	80
Demand	150	70	60	280

- Perubahan biaya untuk semua variabel non-basis (kotak kosong) :

$$\Delta C_{12} = C_{12} - U_1 - V_2 = 5 - 0 - 3 = 2$$

$$\Delta C_{13} = C_{13} - U_1 - V_3 = 6 - 0 - 15 = -9$$

$$\Delta C_{23} = C_{23} - U_2 - V_3 = 12 - 7 - 15 = -10$$

$$\Delta C_{32} = C_{32} - U_3 - V_2 = 9 - (-5) - 3 = 11$$

- C_{13} dan C_{23} negatif, menunjukkan bahwa solusi yang ada belum optimal.
- X_{23} dipilih sebagai *entering variabel* karena memiliki ΔC_{23} paling kecil (paling negatif) .
- Buat loop yang dimualia dari X_{23}
- Lakukan alokasi ulang komoditas pada loop tersebut, sehingga diperoleh tabel distribusi iterasi 2.

Ulangi terus langkah-langkah tersebut hingga diperoleh tabel transportasi optimum, yaitu tabel transportasi yang tidak memiliki ΔC negatif.

Iterasi 2 : $V_1 = 8$ $V_2 = 13$ $V_3 = 15$

$$U_1 = 0$$

$$U_2 = -3$$

$$U_3 = -5$$

Tuj Sbr	1	2	3	supply
1	120 8	5	6	120
2	15	10	12	80
3	3	9	10	80
Demand	150	70	60	280

- Perubahan biaya untuk semua variabel non-basis (kotak kosong) :

$$\Delta C_{12} = C_{12} - U_1 - V_2 = 5 - 0 - 13 = -8$$

$$\Delta C_{13} = C_{13} - U_1 - V_3 = 6 - 0 - 15 = -9$$

$$\Delta C_{21} = C_{21} - U_2 - V_1 = 15 - (-3) - 8 = 10$$

$$\Delta C_{32} = C_{32} - U_3 - V_2 = 9 - (-5) - 13 = 1$$

- C_{12} dan C_{13} negatif, menunjukkan bahwa solusi yang ada belum optimal dan X_{13} dipilih sebagai *entering variabel* karena memiliki ΔC_{13} paling kecil (paling negatif) .

Iterasi 3 : $V_1 = 8$ $V_2 = 4$ $V_3 = 6$

$$U_1 = 0$$

$$U_2 = 6$$

$$U_3 = -5$$

Tuj Sbr	1	2	3	supply
1	8 70	5 70	6 50	120
2	15 70	10 70	12 10	80
3	3 80	9 70	10 60	80
Demand	150	70	60	280

- Perubahan biaya untuk semua variabel non-basis (kotak kosong) :

$$\Delta C_{12} = C_{12} - U_1 - V_2 = 5 - 0 - 4 = 1$$

$$\Delta C_{21} = C_{21} - U_2 - V_1 = 15 - 6 - 8 = 1$$

$$\Delta C_{32} = C_{32} - U_3 - V_2 = 9 - (-5) - 4 = 10$$

$$\Delta C_{33} = C_{33} - U_3 - V_3 = 10 - (-5) - 6 = 9$$

- Seluruh ΔC_{ij} di atas sudah menunjukkan nilai positif semuanya, sehingga dapat disimpulkan bahwa tabel transportasi iterasi 3 di atas telah optimum.
- Apakah solusi optimumnya sama dengan hasil Stepping Stone ? Apakah sama juga dengan metode VAM ?