7 DISTRIBUSI PELUANG

JUMLAH PERTEMUAN : 2 PERTEMUAN

TUJUAN INSTRUKSIONAL KHUSUS : Mahasiswa dapat membedakan jenis-jenis distribusi peluang.

Materi :

7.1.Distribusi Peluang

Definisi peubah acak:

Misalkan E adalah sebuah percobaan dengan ruang sampel T. Sebuah fungsi X yang memetakan setiap anggota $t \in T$ dengan sebuah bilangan real $X(t)$ dinamakan **peubah acak**.

Peubah acak terdiri dari 2 jenis:

1. **Peubah acak diskrit**, jika daerah hasil merupakan himpunan bilangan real yang terhingga.

Contoh, misal ada sebuah percobaan melantunkan dua buah koin secara bersamaan, maka ruang sampel yang mungkin terjadi:

$$T = \{(a,a),(a,g),(g,a),(g,g)\}$$

Maka peubah acak X dinyatakan dengan banyaknya kemunculan angka.

a. Untuk t = (g,g) dipetakan ke nilai 0, $X(g,g) = 0$, karena titik (g,g) tidak mengandung angka sama sekali.
b. Untuk t = (g,a) dipetakan ke nilai a, $X(g,a) = 1$, karena titik (g,a) mengandung 1 angka.
c. Untuk t = (a,g) dipetakan ke nilai a, $X(a,g) = 1$, karena titik (a,g) mengandung 1 angka.

d. Untuk t = (a, a) dipetakan ke nilai a, $X(g, a) = 2$, karena titik (a, a) mengandung 2 angka.

Karena daerah hasil = {0,1,2}, maka X merupakan peubah acak diskrit

2. **Peubah acak kontinu**, jika daerah hasil merupakan sebuah interval pada garis bilangan real.

Contoh, misal ada sebuah percobaan memilih batu yang ada disekitar unikom secara acak, maka ruang sampel yang mungkin terjadi (dalam gram

$$T = \{\text{batu 1, batu 2, batu 3, …, batu 1000}\}$$

Maka peubah acak X dinyatakan dengan berat batu. Jika kita asumsikan bahwa berat batu yang terambil tidak ada yang kurang dari 10 gram dan tidak lebih dari 1000 gram maka daerah hasil = $\{x|10 \leq x \leq 1000\}$, maka X merupakan peubah acak kontinu.

Definsi **distribusi peluang**:

Misalkan **X adalah peubah acak diskrit** dengan nilai-nilainya $x_1, x_2, x_3, .., x_n$. Untuk setiap peubah acak tersebut memiliki nilai peluang, yaitu $P(x_i) = P(X = x_i)$. Nilai-nilai $P(x_1)$ harus memenuhi sifat-sifat sebagai berikut:

a. $P(x_i) \geq 0$, untuk setiap i

b. $\sum_{i=1}^{n} P(x_i) = 1$

Perhatikan hasil percobaan melantunkan dua buah koin. Jika X menyatakan banyaknya kemunculan angka. Jika kita menentukan peluang dari setiap peubah acaknya, pasangan nilai-nilai variabel acak X dengan probabilitas dari nilai X, $P(X = x)$ disebut distribusi peluang yang dapat digambarkan berikut.

$X = x$	0	1	2
$P(X = x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Maka ketika ditanyakan berapa peluang kemunculan angka dari hasil lantunan 2 buah koin secara bersamaan maksimal 1 adalah

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

Definisi **fungsi densitas**:

Misalkan **X adalah peubah acak kontinu** yang didefinisikan atas himpunan bilang real. Sebuah fungsi disebut fungsi densitas dari peubah acak X, jika nilai-nilanya, $f(x)$, memenuhi sifat-sifat sebagai berikut:

1. $f(x) \geq 0$, untuk $x \in (-\infty, \infty)$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$
3. Untuk setiap a, b dengan $-\infty < a < b < \infty$, maka:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\, dx$$

Dalil: Jika X adalah peubah acak kontinu a dan b adalah dua konstanta real dengan $a \leq b$, maka:

$$P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b)$$

Contoh: Diketahui $f(x) = \begin{cases} kx^2 & ; 0 < x < 2 \\ 0 & ; x \text{ lainnya} \end{cases}$

a. Tentukkan nilai k agar $f(x)$ merupakan fungsi densitas dari X.
b. Hitung $P(-1 < x < 1)$

Jawaban:

a. Sifat pertama dari sifat-sifat fungsi densitas dipenuhi, jika $k \geq 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \leftrightarrow k = \frac{3}{8}$$

b. Maka peluang -1< X < 1 adalah

$$P(-1 < x < 1) = \int_{-1}^{1} \frac{3}{8} x^2\, dx = \frac{1}{8}$$

Definisi: Misalkan X adalah peubah acak. P didefinsikan sebagai **fungsi distribusi kumulatif** atau **fungsi distribusi** saja, dengan:

$$F(x) = P(X \leq x)$$

Maka untuk **X peubah acak diskrit**, fungsi distribusiny adalah: $F(x) = \sum_{u \leq x} p(u)$

Contoh: Perhatikan percobaan melantunkan 2 buah koin sekaligus. X adalah menyatakan kemumnculan angka. Tentukan fungsi distribusinya.

Jawab:

Untuk $x < 0$, maka $F(x) = 0$

Untuk $0 \leq x < 1$, maka $F(0) = \sum_{u \leq 0} p(u) = p(0) = \frac{1}{4}$

Untuk $1 \leq x < 2$, maka $F(1) = \sum_{u \leq 1} p(u) = p(0) + p(1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

Untuk $2 \leq x$, maka $F(2) = \sum_{u \leq 2} p(u) = p(0) + p(1) + p(2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1$

Jadi fungsi distribusi dari X adalah:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ \frac{1}{4} & , 0 \leq x < 1 \\ \frac{3}{4} & , 1 \leq x < 2 \\ 1 & , x \geq 2 \end{cases}$$

Jika kita memiliki fungsi distribusi, maka jika ditanyakan peluang;

$$P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$$

Contoh:

Diketahui fungsi distribusi dari peubah acak X berbentuk:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ \frac{1}{2} & , 0 \leq x < 2 \\ \frac{5}{6} & , 2 \leq x < 3 \\ 1 & , x \geq 3 \end{cases}$$

Tentukan fungsi peluangnya.

Jawaban:

Jika kita memperhatikan $F_X(x)$ ada 3 titik yang diskontinu yaitu, $x = 0{,}2{,}3$. Ketiga nilai itu merupakan nilai X yang mempunyai peluang positif.

$$p(x) = F_X(0) - F_X(0\,-) = \frac{1}{2} \;, di\ x = 0$$

$$p(x) = F_X(2) - F_X(2\,-) = \frac{1}{3} \;, di\ x = 2$$

$$p(x) = F_X(3) - F_X(3\,-) = \frac{1}{6} \;, di\ x = 3$$

$$p(x) = 0, di\ x\ lainnya$$

Fungsi peluang dapat juga diperoleh dari fungsi distribusi dengan menggunakan dalil berikut.

Dalil. Jika daerah hasil dari peubah acak X terdiri dari nilai $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots x_n$, maka:

a. $p(x_i) = F(x_i)$ dan
b. $p(x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1}), i = 2,3, \ldots, n$

Definisi: Jika X adalah peubah acak kontinu dengan fungsi densitasnya f, maka fungsi distribusinya diberikan dengan:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$$

Contoh:

Misalkan fungsi densitas dari peubah acak X berbentuk:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}x^2 & , 0 < x < 2 \\ 0 & , x \ lainnya \end{cases}$$

a. Tentukan fungsi distribusinya dari X.
b. Hitung $F\left(1\frac{1}{2}\right)$

Jawaban:

a. Untuk $x < 0$, maka $F(x) = 0$

   Untuk $0 \leq x < 2$, maka $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du = \int_0^x \frac{3}{8}u^2 du = \frac{1}{8}u^3 \Big|_0^x = \frac{1}{8}x^3$

   Untuk $x \geq 2$, maka $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du = \int_0^2 \frac{3}{8}u^2 du = \frac{1}{8}u^3 \Big|_0^2 = 1$

   Jadi fungsi distribusinya dari X adalah:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ \frac{1}{8}x^3 & , 0 \leq x < 2 \\ 1 & , x \geq 2 \end{cases}$$

b. Karena $1\frac{1}{2}$ terletak pada $0 \leq x < 2$, maka:

$$F\left(1\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}\left(1\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{27}{64}$$

Dalil. Jika $f(x)$ dan $F(x)$ masing-masing merupakan nilai fungsi densitas dan nilai fungsi distribusi dari peubah acak X di x, maka:

$$P(a \leq x \leq b) = F(b) - F(a)$$

Untuk beberapa konstanta real a dan b, dengan $a \leq b$, dan:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

Apabila hasil turunannya atau diferensialnya ada.

Contoh:

1. Sebuah kotak berisi 4 bola dengan nomor 1, 2, 3, dan 4.

   Kemudian dua bola diambil secara acak dari kotak itu tanpa pengembalian.

   Jika X menunjukkan jumlah angka dari dua bola yang terambil, maka:

   a. Tentukkan distribusi peluangnya

   b. Hitung $P(X \leq 5)$

   c. Tentukan $F(x)$

2. Misalkan peubah acak X mempunyai distribusi peluang sebagai berikut:

x	0	1	2	3	4	5
p(x)	k	3k	3k	k^2	$2k^2$	$6k^2 + k$

   a. Tentukan nilai konstanta k

   b. Hitung $P(X < 4)$, $P(X \geq 4)$, dan $P(0 < X < 4)$

   c. Tentukan nilai k minimum sedemikian hingga $P(X \leq k) > 0{,}5$

   d. Tentukan fungsi distribusi dari X

3. Misalkan fungsi peluang dari peubah acak X adalah:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{x}{10} & , x = 1{,}2{,}3{,}4 \\ 0 & , x \ lainnya \end{cases}$$

   a. Tentukan $P(x = 1 \ atau \ 2)$, $P(0{,}5 < X < 2{,}5)$

   b. Tentukan fungsi distribusi dari X

4. Misalkan fungsi densitas dari peubah acak X adalah:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & , -2 < x < 2 \\ 0 & , x \ lainnya \end{cases}$$

   a. Tentukan $P(-2 < x < 0)$, $P(0 < x < 3)$

   b. Tentukan fungsi distribusinya

5. Misalkan fungsi distribusi dari peubah acak X adalah:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & , x < -1 \\ \frac{x+2}{4} & , -1 \leq x < 1 \\ 1 & , x \geq 1 \end{cases}$$

a. Hitung $P(-0.5 < X < 0.5)$

b. Hitung $P(X = 0)$