



MACAM-MACAM DISTRIBUSI

JUMLAH PERTEMUAN : 4 PERTEMUAN

TUJUAN INSTRUKSIONAL KHUSUS : Mahasiswa dapat membedakan jenis-jenis distribusi peluang yang terkenal dan mengetahui aturan-aturannya.

Materi :

8.1. Distribusi Bernoulli

Jika didalam percobaan hanya memiliki dua hasil, yaitu “berhasil” dan “gagal”, dengan masing-masing peluang kejadian adalah θ dan $1 - \theta$, maka banyaknya percobaan tersebut mempunyai distribusi Bernoulli.

Definisi: Peubah acak X mempunyai distribusi Bernoulli, dan dikatakan sebagai peubah acak Bernoulli, jika dan hanya jika distribusi peluangnya berbentuk:

$$p(x, \theta) = \theta^x (1 - \theta)^{1-x}$$

Dimana $x = 0,1$. Sehingga:

Keterangan	Nilai
Rata-rata (μ)	$\mu = \theta$
Varians (σ^2)	$\sigma^2 = \theta(1 - \theta)$

Contoh:

Sebuah dadu dilantunkan 1 kali. Jika diasumsikan sukses ketika muncul mata dadu genap. Tentukan peluang sukses dari hasil lantunan sebuah dadu.

Jawaban:

Hasil lantunan sebuah dadu $T = \{1,2,3,4,5,6\}$



STATISTIKA DAN PROBABILITAS

Misal A adalah kejadian munculnya mata dadu genap. $A = \{2,4,6\}$, maka:

$$P(A) = \frac{3}{6} = \theta$$

$$P(X = 1) = \left(\frac{3}{6}\right)^1 \left(1 - \frac{3}{6}\right)^{1-1} = \frac{3}{6}$$

8.2. Distribusi Binomial

Misalkan kita melakukan suatu percobaan yang hanya menghasilkan dua hasil, yaitu “berhasil” dan “gagal”, dengan masing-masing peluang kejadian adalah θ dan $1 - \theta$. Kemudian percobaan tersebut dilakukan sebanyak n kali dan setiap percobaannya saling bebas. Dari n kali percobaan, misalkan kejadian “berhasil” terjadi x kali, sisanya $(n - x)$ kali kejadian “gagal”. Percobaan tersebut mempunyai distribusi Binomial.

Definisi: Peubah acak X dikatakan mempunyai distribusi binomial dan dikatakan juga sebagai peubah acak binomial, jika dan hanya jika distribusi peluangnya berbentuk:

$$b(x; n, \theta) = C_x^n \theta^x (1 - \theta)^{n-x}$$

Dimana C_x^n = kombinasi n percobaan untuk x kejadian. $x = 0, 1, 2, \dots, n$. Sehingga:

Keterangan	Nilai
Rata-rata (μ)	$\mu = n\theta$
Varians (σ^2)	$\sigma^2 = n\theta(1 - \theta)$

Contoh:

Sebuah dadu dilantunkan sebanyak 10 kali. Jika diasumsikan sukses ketika muncul mata dadu genap. Tentukan peluang:

sukses sebanyak 3 kali.

sukses maksimal sebanyak 3 kali.

Jawaban:

Hasil lantunan sebuah dadu $T = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Misal A adalah kejadian munculnya mata dadu genap. $A = \{2, 4, 6\}$, maka:



$$P(A) = \frac{3}{6} = \theta$$

Sukses sebanyak 3 kali

$$P(X = 3) = C_3^{10} \left(\frac{3}{6}\right)^3 \left(1 - \frac{3}{6}\right)^{10-3} = 0.1172$$

Sukses maksimal 3 kali

$$\begin{aligned} P(X \leq 3) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) \\ &= C_0^{10} \left(\frac{3}{6}\right)^0 \left(1 - \frac{3}{6}\right)^{10-0} + C_1^{10} \left(\frac{3}{6}\right)^1 \left(1 - \frac{3}{6}\right)^{10-1} + C_2^{10} \left(\frac{3}{6}\right)^2 \left(1 - \frac{3}{6}\right)^{10-2} \\ &\quad + C_3^{10} \left(\frac{3}{6}\right)^3 \left(1 - \frac{3}{6}\right)^{10-3} = 0.1719 \end{aligned}$$

8.3. Distribusi Poisson

Distribusi Poisson ini diperoleh dari distribusi binomial apabila dalam distribusi binomial berlaku syarat-syarat sebagai berikut:

Ukuran sampelnya sangat besar ($n \rightarrow \infty$)

Peluang terjadinya peristiwa yang diperhatikan mendekati nol ($\theta \rightarrow 0$)

Perkalian $n\theta = \lambda$, sehingga $\theta = \frac{\lambda}{n}$

Secara umum, distribusi poisson akan merupakan pendekatan yang baik dari distribusi binomial, jika:

$n \geq 100$ dan $n\theta \leq 10$

$n \geq 20$ dan $\theta \leq 0,05$

Definisi: Peubah acak X dikatakan mempunyai distribusi Poisson dan dikatakan juga sebagai peubah acak Poisson, jika dan hanya jika distribusi peluangnya berbentuk:

$$p(x; \lambda) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

Dimana $x = 0, 1, 2, \dots$ Sehingga:



STATISTIKA DAN PROBABILITAS

Keterangan	Nilai
Rata-rata (μ)	$\mu = \lambda$
Varians (σ^2)	$\sigma^2 = \lambda$

Contoh:

Misalkan hasil suatu studi, bahwa 1 dari 1000 orang yang melewati tangga gedung lama akan jatuh. Jika ada 100 orang yang melewati tangga tersebut, berapakah peluang yang akan jatuh sebanyak 2 orang?

Jawaban:

$$n = 100$$

$$p = 1 \text{ orang}/1000 \text{ orang} = 0,001$$

$$\lambda = n.p = 100 * 0,001 = 0,1$$

Maka X mempunyai distribusi Poisson, yaitu:

$$P(X = 2) = \frac{(0.1)^2 e^{-0.1}}{2!} = 0.0045$$

8.4. Distribusi Geometri

Misalkan kita melakukan percobaan yang menghasilkan dua peristiwa, yaitu peristiwa A dan peristiwa bukan A. Kemudian kita mengulangi percobaan di atas sampai beberapa kali, dengan masing-masing perulangan percobaan bersifat bebas dan pada masing-masing pengulangan peluang terjadinya peristiwa A, yaitu $P(A) = \theta$, dan peluang terjadinya peristiwa bukan A, yaitu $P(A^c) = 1 - \theta$ bersifat tetap.

Didefinisikan peubah acak X sebagai banyak perulangan percobaan samapi peristiwa A terjadi pertama kali. Maka nilai-nilai X adalah 1, 2, 3, Jika $X = x$, ini berarti bahwa $(x - 1)$ perulangan pertama menghasilkan peristiwa bukan A dan perulangan ke-x menghasilkan peristiwa A. Maka peluang bahwa peristiwa A terjadi pertama kali pada perulangan ke-x ditentukan oleh:

$$P(X = x) = (1 - \theta)^{x-1} \theta, x = 1, 2, 3, \dots$$

Dimana $x = 1, 2, 3, \dots$



STATISTIKA DAN PROBABILITAS

Keterangan	Nilai
Rata-rata (μ)	$\mu = \frac{1}{\theta}$
Varians (σ^2)	$\sigma^2 = \frac{1 - \theta}{\theta^2}$

Contoh:

Misalkan kita melakukan pengundian sebuah dadu yang seimbang. Kemudian kita mengulangi pengundian tersebut beberapa kali sampai dadu itu menghasilkan angka 1. Berapa peluangnya bahwa mata 1 itu akan muncul pada pengundian ke-5?

$$P(X = 5) = \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{5-1} \left(\frac{1}{6}\right) = 0,0804$$

8.5. Distribusi Hypergeometri

Misalkan kita mempunyai populasi suatu barang berukuran N buah yang terdiri dari k buah barang baik dan $(N-k)$ buah barang cacat. Kemudian kita mengambil sampel acak berukuran n dari populasi itu ($n \leq N$) **tanpa pengembalian**, dan ternyata dari sampel acak itu berisi x buah barang baik dan $(n-x)$ buah barang cacat.

Untuk mendapatkan x buah barang baik dari k buah dapat dipilih dalam C_x^k cara yang berbeda, sedangkan untuk mendapat $(n-x)$ buah barang cacat dari $(N-k)$ buah dapat dipilih dalam C_{n-x}^{N-k} cara yang berbeda. Dan untuk mendapatkan n buah barang dari populasi berukuran N buah barang dapat dipilih dalam C_n^N cara yang berbeda dan masing-masing cara diasumsikan mempunyai kesempatan atau peluang yang sama untuk terpilih kedalam sampel. Maka besar peluang bahwa sampel acak itu berisi x buah barang baik ditentukan oleh:

$$P(X = x) = \frac{C_x^k C_{n-x}^{N-k}}{C_n^N}$$

Dimana $x = 0, 1, 2, 3, \dots, n$. Sehingga:

Keterangan	Nilai
Rata-rata (μ)	$\mu = \frac{nk}{N}$
Varians (σ^2)	$\sigma^2 = \frac{nk(N-n)(N-k)}{N^2(N-1)}$



Contoh:

Dalam suatu kantong terdapat 10 bola merah dan 5 bola putih. Bila diambil 3 bola secara acak, tentukanlah probabilitas untuk memperoleh 1 bola merah.

Jawaban:

$$P(X = 1) = \frac{C_1^{10} C_2^5}{C_3^{15}} = \frac{20}{91}$$

8.6. Distribusi Normal

Definisi: Peubah acak X dikatakan mempunyai distribusi normal dan dikatakan juga sebagai peubah acak normal, jika dan hanya jika fungsi densitasnya:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Dimana $-\infty < x < \infty$, $-\infty < \mu < \infty$, $\sigma > 0$. Sehingga:

Keterangan	Nilai
Rata-rata (μ)	μ
Varians (σ^2)	σ^2

Distribusi Normal Baku

Untuk menghitung integral dari fungsi densitas atau luas daerah dibawah kurva fungsi densitas, akan lebih mudah jika menggunakan table yang berasal dari distribusi normal dengan $\mu = 0$ dan $\sigma^2 = 1$.

Definisi: Distribusi normal dengan $\mu = 0$ dan $\sigma^2 = 1$ dinamakan normal baku dan mempunyai fungsi densitas:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

Dimana $-\infty < x < \infty$. Sehingga:

Keterangan	Nilai
Rata-rata (μ)	0
Varians (σ^2)	1



STATISTIKA DAN PROBABILITAS

Dalil: Jika X adalah peubah acak berdistribusi normal dengan rata-rata μ dan simpangan baku σ , maka:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Mempunyai distribusi normal baku.

Sifat-sifat distribusi normal:

- Grafiknya selalu ada diatas sumbu datar x
- Bentuk grafiknya simetris terhadap $x = \mu$
- Mempunyai satu modus, jadi kurva unimodal, tercapai pada $x = \mu$
- Grafiknya mendekati sumbu datar x dimulai dari $x = \mu + 3\sigma$ ke kanan dan $x = \mu - 3\sigma$ ke kiri.
- Luas daerah grafik selalu sama dengan 1 unit persegi.

Cara menentukan luas daerah atau besar peluang dengan menggunakan table distribusi normal:

- Hitung z sehingga dua decimal
- Gambarkan kurvanya
- Letakan harga z pada sumbu datar, lalu Tarik garis vertical hingga memotong kurva.
- Luas yang tertera dalam daftar adalah luas daerah antara garis ini dengan garis tegak di titik nol
- Dalam table distribusi normal, cari tempat harga z pada kolom paling kiri hanya hingga 1 desimal dan decimal keduanya dicari pada baris paling atas.
- Dari z di kolom kiri maju ke kanan dan dari z di baris atas turun ke bawah, maka didapatkan bilangan yang merupakan luas yang dicari.

Contoh:

Dari pengiriman sebanyak 1000 rim kertas koran dengan berat 60 gram diketahui bahwa rata-rata tiap rimnya berisi 450 lembar dengan standar deviasi 10 lembar. Jika distribusi jumlah kertas per rim tersebut berdistribusi normal, berapa persen dari rim kertas itu yang berisi 455 lembar atau lebih?

Diketahui: $\mu = 450$ dan $\sigma = 10$



Misalkan X = jumlah kertas per rim

Ditanyakan: $P(X \geq 455) = ?$

Jawaban:

$$P(X \geq 455) = P\left(Z \geq \frac{455 - 450}{10}\right) = P(Z \geq 0.5) = 0.5 - 0.1915 = 0.3085$$

8.7. Distribusi Student

Definisi: Peubah acak t dikatakan mempunyai distribusi student dan dikatakan juga sebagai peubah acak student, jika dan hanya jika fungsi densitasnya:

$$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi v} \Gamma\left(\frac{v}{2}\right) \left(1 + \frac{t^2}{v}\right)^{\frac{v+1}{2}}}$$

Dimana $-\infty < t < \infty$ dan $\Gamma(x)$ fungsi gama, $v = (n - 1)$ yang dinamakan derajat kebebasan, akan disingkat dengan dk. Sehingga:

Keterangan	Nilai
Rata-rata (μ)	$\mu = 0$
Varians (σ^2)	$\sigma^2 = \frac{v}{v-2}$

Bentuk grafik seperti grafik distribusi normal baku, simetrik terhadap $t = 0$, sehingga sepintas hamper tak ada bedanya. Untuk harga-harga n yang besar, biasanya $n \geq 30$, distribusi student mendekati distribusi normal baku

Cara menentukan luas daerah atau besar peluang dengan menggunakan tabel distribusi normal:

Hitung nilai p (derajat kepercayaan)

Dalam table distribusi t , cari tempat nilai p pada baris paling atas dan nilai derajat kebebasan dicari pada kolom paling kiri.



STATISTIKA DAN PROBABILITAS

Dari p di baris atas ke bawah dan dari dk di kolom kiri ke kanan, maka didapatkan bilangan yang merupakan luas yang dicari.

Didalam distribusi student jika dk tidak dapat ditemukan maka dapat menggunakan interpolasi.