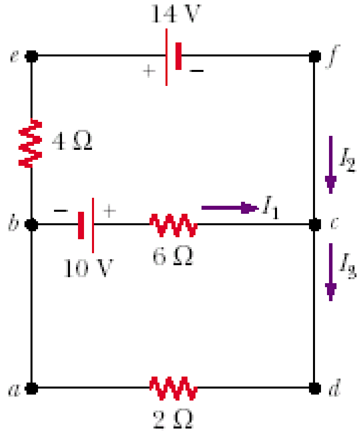
3.6 Contoh aplikasi

3.6.1 Menghitung arus listrik

Gunakan metode Eliminasi Gauss untuk menentukan arus i_1, i_2 dan i_3 yang mengalir pada rangkaian berikut ini



jawab:

Berdasarkan Hukum Kirchhoff:

$$I_1 + I_2 = I_3$$
$$-14 + 6(I_1 + I_3) - 10 + 4I_1 = 0$$
$$10I_1 + 6I_3 = 24$$
$$-10 + 6(I_3 + I_1) + 2I_3 = 0$$
$$6I_1 + 8I_3 = 10$$

Lalu kita susun ulang ketiga persamaan di atas menjadi seperti ini:

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0$$
$$6I_1 - 4I_2 = 24$$
$$6I_1 + 2I_3 = 10$$

Kemudian dinyatakan dalam bentuk matriks:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 6 & -4 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 24 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Selanjutkan kita susun matriks augmentasi sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 6 & -4 & 0 & 24 \\ 6 & 0 & 2 & 10 \end{bmatrix}$$

Langkah berikutnya adalah menghitung matriks triangularisasi dengan langkah-langkah sebagai berikut:

$$m = a_{21}/a_{11} = 6/1 = 6$$
$$a_{21} = a_{21} - m.\ a_{11} = 6 - (6).\ (1) = 0$$

$a_{22} = a_{22} - m.\ a_{12} = -4 - (6).\ (1) = -10$
$a_{23} = a_{23} - m.\ a_{13} = 0 - (6).\ (-1) = 6$
$a_{24} = a_{24} - m.\ a_{14} = 24 - (6).\ (0) = 24$
$m = a_{31}/a_{11} = 6/1 = 6$
$a_{31} = a_{31} - m.\ a_{11} = 6 - (6).\ (1) = 0$
$a_{32} = a_{32} - m.\ a_{12} = 0 - (6).\ (1) = -6$
$a_{33} = a_{33} - m.\ a_{13} = 2 - (6).\ (-1) = 8$
$a_{34} = a_{34} - m.\ a_{14} = 10 - (6).\ (0) = 10$

Sampai disini matriks augment mengalami perubahan menjadi

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -10 & 6 & 24 \\ 0 & -6 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

Kelanjutan langkah menuju triangularisasi adalah

$$\begin{aligned} m = \frac{a_{32}}{a_{22}} &= \frac{-6}{-10} \\ a_{31} = a_{31} - m.a_{21} = 0 - (\frac{-6}{-10}).(0) &= 0 \\ a_{32} = a_{32} - m.a_{22} = -6 - (\frac{-6}{-10}).(-10) &= 0 \\ a_{33} = a_{33} - m.a_{23} = 8 - (\frac{-6}{-10}).(6) &= 4,4 \\ a_{34} = a_{34} - m.a_{24} = 10 - (\frac{-6}{-10}).(24) &= -4,4 \end{aligned}$$

maka matriks triangularisasi berhasil didapat yaitu

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -10 & 6 & 24 \\ 0 & 0 & 4,4 & -4,4 \end{bmatrix}$$

Sekarang tinggal melakukan proses substitusi mundur

$$\begin{aligned} I_3 = \frac{a_{34}}{a_{33}} &= \frac{-4,4}{4,4} = -1 \\ I_2 = \frac{a_{24} - a_{23}.I_3}{a_{22}} &= \frac{24 - (6).(-1)}{-10} = -3 \\ I_1 = \frac{a_{14} - (a_{13}.I_3 + a_{12}.I_2)}{a_{11}} &= \frac{(0 - [(-1).(-1) + (1).(-3)]}{1} = 2 \end{aligned}$$

Jadi besarmasing-masing arus pada rangkaian di atas adalah $I_1 = 2A$, $I_2 = -3A$ dan $I_3 = -1A$. Tanda minus (-) memiliki arti bahwa arah arus yang sesungguhnya berlawanan arah dengan asumsi awal yang kita gunakan. Keseluruhan tahapan perhitungan di atas cukup diselesaikanoleh *source-code* berikut ini

```
clear all
clc

%---- inisialisasi matrik A ----
A = [1 1 -1
6 -4 0
```

```
6 0 2];

%---- inisialisasi vektor b ----
b = [0 ; 24 ; 10];

I=elgauss(A,b)
```

Isimatrik A diturunkan dari sistempersamaan linear yangmengacu kepada HukumKirchhoff sebagai berikut

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0$$
$$6I_1 - 4I_2 = 24$$
$$6I_1 + 2I_3 = 10$$

yang kemudian dinyatakan dalam bentuk matrik A dan vektor b:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 6 & -4 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 24 \\ 10 \end{bmatrix}$$

3.6.2 Mencari invers matrik

Dalam kaitannya dengan invers matrik, matrik **A** disebut matrik **non-singular** jika matrik **A** memiliki matrik invers dirinya yaitu $\mathbf{A}^{-1}$ Atau dengan kata lain, matrik $\mathbf{A}^{-1}$adalah inversdari matrik **A**. Jika matrik **A** tidak memiliki invers, maka matrik **A** disebut **singular**. Bila matrik **A** dikalikan dengan matrik $\mathbf{A}^{-1}$maka akanmenghasilkanmatrik identitas **I**, yaitu suatu matrik yang elemen-elemen diagonalnya bernilai 1.

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

Misalnya diketahui,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{9} & \frac{5}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Bila keduanya dikalikan, maka akan menghasilkan matrik identitas,

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{2}{9} & \frac{5}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Lalu bagaimana cara memperoleh matrik invers, $\mathbf{A}^{-1}$?
Itulah bahan diskusi kita kali ini. Baiklah.., anggap saja kita tidak tahu isi dari $\mathbf{A}^{-1}$. Tapi yang jelas matrik $\mathbf{A}^{-1}$ukurannya mesti sama dengan matrik **A**, yaitu 3x3.

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{11} & i_{12} & i_{13} \\ i_{21} & i_{22} & i_{23} \\ i_{31} & i_{32} & i_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

dalam hal ini matrik $\mathbf{A}^{-1}$ adalah

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} i_{11} & i_{12} & i_{13} \\ i_{21} & i_{22} & i_{23} \\ i_{31} & i_{32} & i_{33} \end{bmatrix}$$

Elemen-elemen matrik invers, $\mathbf{A}^{-1}$dapat diperoleh dengan menerapkan metode eliminasi gauss pada persamaan 3.5 yang telah dipecah 3 menjadi

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{11} \\ i_{21} \\ i_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{21} \\ i_{22} \\ i_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{31} \\ i_{32} \\ i_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ketiganya dapat diselesaikan satu persatu menggunakan source code Eliminasi Gauss. Source code untuk mendapatkan kolom pertama dari matrik invers adalah

```
clear all
clc

%---- inisialisasi matrik A ----
A = [1 2 -1
2 1 0
-1 1 2];

%---- inisialisasi vektor b ----
for j = 1:3
b(j,1) = 0;
end
b(1,1) = 1;

I=elgauss(A,b)
```

Sementara, source code untuk mendapatkan kolom kedua dari matrik invers adalah

```
clear all
clc

%---- inisialisasi matrik A ----
A = [1 2 -1
2 1 0
-1 1 2];

%---- inisialisasi vektor b ----
for j = 1:3
b(j,1) = 0;
end
b(2,1) = 1;

I=elgauss(A,b)
```

Dan untuk memperoleh kolom ketiga matrik invers, caranya adalah

```
clear all
clc

%---- inisialisasi matrik A ----
A = [1 2 -1
2 1 0
-1 1 2];

%---- inisialisasi vektor b ----
for j = 1:3
b(j,1) = 0;
end
b(3,1) = 1;

I=elgauss(A,b)
```

Memang pada prinsipnya, denganmenjalankan tiga source-code di atas, akan diperolehmatrik invers. Namun cara seperti ini tentunya kurang efektif. Mungkinkah ketiganya digabung menjadi satu? Jelas bisa!

```
clear all
clc

%---- inisialisasi matrik A ----
A = [1 2 -1
2 1 0
-1 1 2];

%---- inisialisasi vektor b ----
for j = 1:3
b(j,1) = 0;
end
b(1,1) = 1;
I=elgauss(A,b);
for k = 1:3
AI(k,1) = I(k,1);
end

for j = 1:3
b(j,1) = 0;
end
b(2,1) = 1;
I=elgauss(A,b);
for k = 1:3
AI(k,2) = I(k,1);
end

for j = 1:3
b(j,1) = 0;
end
b(3,1) = 1;
I=elgauss(A,b);
for k = 1:3
AI(k,3) = I(k,1);
end
```

Jika kita munculkan indeks i seperti ini

```
clear all
clc

%---- inisialisasi matrik A ----
A = [1 2 -1
2 1 0
-1 1 2];

%---- inisialisasi vektor b ----
i = 1;
for j = 1:3
b(j,1) = 0;
end
b(i,1) = 1;
I=elgauss(A,b);
```

```
for k = 1:3
AI(k,i) = I(k,1);
end

i = 2;
for j = 1:3
b(j,1) = 0;
end
b(i,1) = 1;
I=elgauss(A,b);
for k = 1:3
AI(k,i) = I(k,1);
end

i = 3;
for j = 1:3
b(j,1) = 0;
end
b(i,1) = 1;
I=elgauss(A,b);
for k = 1:3
AI(k,i) = I(k,1);
end
```

maka source code tersebut dapat dioptimasi menjadi

```
clear all
clc

%---- inisialisasi matrik A ----
A = [1 2 -1
2 1 0
-1 1 2];


%---- menghitung matrik invers ----
for i = 1:3
        for j = 1:3
                b(j,1) = 0;
        end
b(i,1) = 1;
I=elgauss(A,b);
        for k = 1:3
                AI(k,i) = I(k,1);
        end
end
```

Diperlukan sedikit lagi modifikasi agar source code tersebut dapat berlaku umum

```
clear all
clc

%---- inisialisasi matrik A ----
A = [1 2 -1
2 1 0
-1 1 2];

%---- menghitung matrik invers ----
dim = size(A);
n = dim(1);
for i = 1:n
        for j = 1:n
                b(j,1) = 0;
        end
        b(i,1) = 1;
        I=elgauss(A,b);
        for k = 1:n
                AI(k,i) = I(k,1);
        end
end
```

3.6.2.1 function invers matrik

Berdasarkan source code yang sudah teroptimasi di atas, kita bisa membuat function untuk menghitung matrik invers.

```
%---- menghitung matrik invers ----
function AI = Ainv(A)
dim = size(A);
n = dim(1);
for i = 1:n
for j = 1:n
b(j,1) = 0;
end
b(i,1) = 1;
I=elgauss(A,b);
for k = 1:n
AI(k,i) = I(k,1);
end
end
```

Dengan demikian, untuk mendapatkan matrik invers, cara termudahnya adalah

```
clear all
clc

%---- inisialisasi matrik A ----
A = [1 2 -1
2 1 0
-1 1 2];

%---- menghitung matrik invers ----
AI = Ainv(A);
```

Keberadaan matrik $\mathbf{A}^{-1}$ bisa digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear (mencari nilai x), dengan cara sebagai berikut

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Ax} &= \mathbf{b} \\
\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Ax} &= A^{-1}\mathbf{b} \\
\mathbf{Ix} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \\
\mathbf{x} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

Contoh berikut ini akan menjelaskan prosesnya secara lebih rinci. Misalnya diketahui sistem persamaan linear

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 2$$
$$2x_1 + x_2 = 3$$
$$-x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$$

Bila dikonversikan kedalam operasi matrik menjadi

$$
\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} =
\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}
$$

Berdasarkan persamaan (3.6), maka elemen-elemen vektor **x** dapat dicari dengan cara

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

$$
\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{9} & \frac{5}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} =
\begin{bmatrix} \frac{7}{9} \\ \frac{13}{9} \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix}
$$

Akhirnya diperoleh solusi $x_1 = 7/9$, $x_2 = 13/9$, dan $x_3 = 5/3$. Penyelesaian sistem persamaan linear menjadi lebih mudah bila matrik $\mathbf{A}^{-1}$ sudah diketahui. Sayangnya, untuk mendapatkan matrik $\mathbf{A}^{-1}$, diperlukan langkah-langkah, seperti yang sudah dibahas pada contoh pertama di atas, yang berakibat in-efisiensi proses penyelesaian (secara komputasi) bila dibandingkan dengan metode eliminasi gauss untuk memecahkan sistem persamaan linear. Namun bagaimanapun, secara konseptual kita dianjurkan mengetahui cara bagaimana mendapatkan matrik $\mathbf{A}^{-1}$.